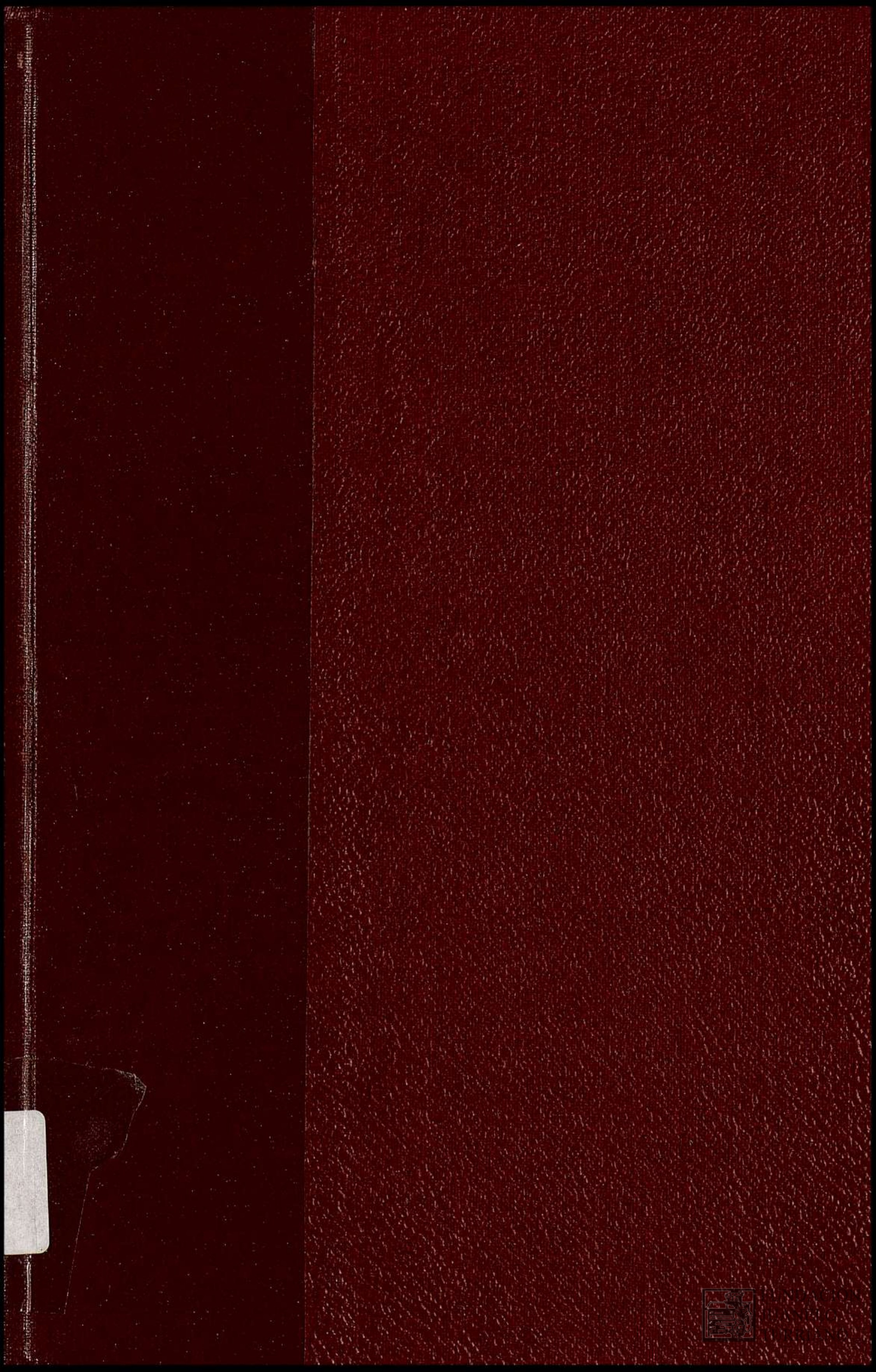








A mi queridísimo amigo y compañero Antonio Prieto,

J. M. de Zafra

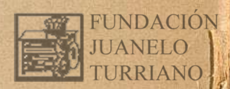
CONSTRUCCIONES

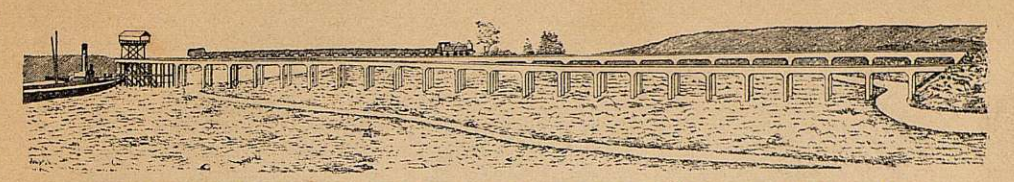
DE

HORMIGÓN ARMADO

PRIMERA PARTE

MECÁNICA DEL HORMIGÓN ARMADO


FUNDACIÓN
JUANELO
TURRIANO



SEVILLA.—EMBARCADERO DE LAS MINAS DE CALA.—LONGITUD, 232 METROS.—OBRA DEL AUTOR

CONSTRUCCIONES

DE

HORMIGON ARMADO

POR

JUAN MANUEL DE ZAFRA

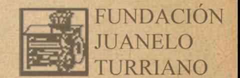
INGENIERO DEL CUERPO NACIONAL DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

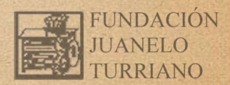
PROFESOR DE DICHA ASIGNATURA
Y DE LA DE PUERTOS Y SEÑALES MARÍTIMAS
EN LA ESCUELA ESPECIAL DEL CUERPO

PRIMERA PARTE

MECÁNICA DEL HORMIGÓN ARMADO

MADRID
Imp. y encuad. de V. Tordesillas
Tutor, 16.—Teléf. 2.042
1911




FUNDACIÓN
JUANELO
TURRIANO

FE DE ERRATAS

	DICE	DEBE DECIR
Pág. 7, línea 15:	«Hennebique y Compañía», de Sestao	Hennebique y «Compañia de Sestao»
100, cuadro (44), primera casilla:	$\frac{e}{l}$	$\frac{l}{e}$
107, expresión (48):	0,02 6 900	0,02 6,00 900
171, figura; en la fibra neutra:	1 o	s σ
214, expresión (197):	$\frac{2}{3}\frac{E}{(3-n)}$	$\frac{2}{3}\frac{E}{(3-n)}\frac{1}{c}$

ÍNDICE

CAPÍTULO PRIMERO

IDEA GENERAL DEL HORMIGÓN ARMADO

Págs.

I.—Aparición y evolución........................... 1
II.—Formas constructivas........................... 9
III.—Características generales........................... 15

CAPÍTULO II

RESISTENCIA Y ELASTICIDAD DEL HORMIGÓN ARMADO

I.—Hormigones........................... 23
II.—Armaduras........................... 34
III.—Elasticidad longitudinal........................... 37
IV.—Elasticidad transversal........................... 49
V.—Adherencia........................... 53
VI.—Variaciones de volumen........................... 58
VII.—Deformación........................... 72
VIII.—Coeficientes de seguridad........................... 78

CAPÍTULO III

CÁLCULO EN GENERAL.—CARGAS UNIFORMES

I.—Sólidos heterogéneos........................... 84
II.—Compresión uniforme........................... 91
III.—Tracción uniforme........................... 106

CAPÍTULO IV

FLEXIÓN SENCILLA

I.—Estudio experimental........................... 110
II.—Ecuaciones generales........................... 124
III.—Procedimiento gráfico........................... 130
IV.—Piezas asimétricas........................... 132

Págs.

V.—Piezas disimétricas.. 137
VI.—Piezas simétricas.. 139
VII.—Resumen práctico.. 141
VIII.—Gráficos y ejemplos.. 147

CAPÍTULO V

FLEXIÓN COMPUESTA

I.—Compresión variable.. 153
II.—Compresión y tracción.. 158
III.—Método gráfico.. 170
IV.—Cálculo inductivo y ejemplos.. 173

CAPÍTULO VI

CARGAS TRANSVERSALES

I.—Estudio general.. 179
II.—Armaduras secundarias.. 193
III.—Armaduras principales levantadas.. 202
IV.—Vigas de entramado.. 217
V.—Torsión.. 224
VI.—Ejemplos.. 225

CAPÍTULO VII

DEFORMACIÓN Y SOLIDARIDAD

I.—Flechas.. 232
II.—Fisuras.. 238
III.—Repartición de sobrecargas.. 244
IV.—Observaciones generales.. 263

CAPÍTULO VIII

HORMIGÓN ZUNCHADO

I.—Estudio general.. 274
II.—Cálculo y ejemplos.. 282

APÉNDICE

Tablas numéricas (80) y (86).. 293
Tablas numéricas (100) y auxiliar.. 295
Gráfico (99).. 297



CONSTRUCCIONES DE HORMIGÓN ARMADO

PRIMERA PARTE

MECÁNICA DEL HORMIGÓN ARMADO

CAPÍTULO PRIMERO

IDEA GENERAL DEL HORMIGÓN ARMADO

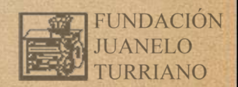
I

Aparición y evolución.

Durante muchos siglos sólo se utilizan para la construcción los materiales pétreos. Los primeros monumentos, de carácter conmemorativo, ó religioso, concebidos bajo la idea dominante de alcanzar una duración ilimitada, son conjuntos de enormes piedras, sin más enlace que el de su peso; al principio, sin labra alguna (monumentos megalíticos, obras ciclópeas); después, tosca, esmerada, y hasta prodigiosamente labradas (pirámides egipcias).

Los pueblos faltos de piedras naturales crean las artificiales, ladrillos, muy grandes al principio y sentados á hueso; después más pequeños y trabados con mortero.

Aparece la bóveda, forma por excelencia para resistir á la compresión, y se empieza después á usar el mortero, para enlazar las piedras. El tamaño de éstas va aminorando, hasta que aparece el hormigón, obra del pueblo romano, y



que refleja el carácter utilitario de éste. Merced al hormigón, construye rápida y económicamente enormes masas, que reviste de piedra para darles la belleza á que, juntamente con la perduración, aspira. Generaciones posteriores utilizan como canteras esos monumentos, que pierden su hermosa envolvente, pero que subsisten todavía, gracias á ser de hormigón.

Las obras de piedra prosiguen su perfeccionamiento, hasta llegar al más alto grado en manos de los constructores medioevales. Pero las formas alcanzan tanta esbeltez y atrevimiento, que la trabazón debida al mortero resulta insuficiente. Aparece entonces la idea de asociar á la piedra, que resiste bien á la compresión, otro material que contrarreste la tensión. Se emplean primero llaves formadas por huesos (catedral de Saint-Denis), y después grapas y tirantes metálicos.

Poco antes que los ferrocarriles se empiezan á usar los materiales metálicos, y renace la idea de su asociación con los pétreos. Pero en lugar de ser el hierro oscuro auxiliar, anegado en la masa de fábrica, toma un papel preponderante; nace el puente colgado, recíproco de la bóveda, y forma por excelencia del material resistente á la tracción.

Los dos materiales se complementan, pero su asociación no es perfecta; se yuxtaponen sin compenetrarse; se dividen el trabajo sin ayudarse mutuamente.

Desde la aparición de los ferrocarriles se afirma cada vez más el carácter utilitario de la mayoría de las construcciones. El perfeccionamiento de los aglomerantes, y la carestía de la mano de obra limitan cada día más el empleo de las piedras labradas, para sustituirlas, en lo que no ha de tener carácter monumental, por elementos más pequeños, que dan fábricas de ejecución más rápida y económica. La que en



más alto grado presenta esas condiciones, el hormigón, se desarrolla prodigiosamente, sobre todo en el pueblo más positivista, el yanqui.

El empleo de materiales metálicos hace aparecer nuevas formas: tras el arco, imitación de la bóveda, y tras el puente colgado, caído en descrédito por errores de la época, vienen las vigas tubulares, los arcos atirantados, los puentes-grúas, hasta alcanzar vanos de 518 metros en el puente del Forth, casi al mismo tiempo que renace el puente colgado y salva los de 486 en el de Brooklyn.

La gran resistencia específica del metal puede ser utilizada hasta lo último cuando trabaja por tracción; en el caso inverso no basta la sección estricta, es preciso que la acompañe un cierto momento de inercia; y para obtenerlo, aun distribuída en formas huecas y rígidas, esa sección no alcanza, y es menester, prácticamente, doblarla. Y si no se atiende á esto, sobreviene el pandeo, la causa de la catástrofe del puente de Quebec.

La fábrica, inepta para trabajar por tracción, resiste á un tiempo pandeo y compresión sólo con tener ésta en cuenta, gracias á su mediana resistencia específica.

En uno y otro material la forma más económica es la relativa al mínimo de dimensiones elementales: barras de poca sección y gran longitud, en uno; pequeñas piedras, todas aglomeradas, formando grandes masas, en otro. En ambos el principal enemigo es la junta.

El material por excelencia en nuestra época, esencialmente utilitaria, no puede ser ni uno ni otro, ni los dos separados, ni tampoco yuxtapuestos. Debe ser el conjunto de los dos, el conjunto íntimo, de compenetración mutua, para que cada uno supla las deficiencias del otro, para que se sumen sus cualidades y no sus defectos.



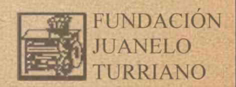
De esta aspiración, sentida de un modo rudimentario desde mucho tiempo atrás, ha nacido el hormigón armado.

La práctica de anegar en yeso ó en mortero una tela metálica, para formar tabiques y techos, era ya conocida desde 1840, cuando Lambot la extendió á la construcción de una lancha, presentada en la Exposición de París de 1855, y, según parece, todavía existente; nadie, ni el propio autor, vió en ella más que una curiosidad.

Coignet, inventor de los aglomerados de su nombre, hormigones comprimidos por moldeo, publicó en 1861 una Memoria, en la que, al estudiar la posibilidad de obtener piezas resistentes á la flexión, agregando á sus aglomerados barras metálicas, tuvo realmente una intuición de lo que podía ser el hormigón armado. Pero no pasó de su Memoria.

El inventor, si inventor ha habido, fué el jardinero Monier, no al copiar á Lambot y predecesores haciendo macetones, tazas de fuente, etc., como ya habían hecho otros, tabiques, techos y lanchas, sino al extender el principio de la asociación de mortero con elementos metálicos á la construcción de tubos (1868), puentes (1873), féretros (¡!) (1873), traviesas, acueductos, alcantarillas (1878), cubiertas (1881)... en cuyas fechas obtuvo los certificados de adición á su primera patente, otorgada en 1867, con la fórmula usual de «sin garantía respecto á la novedad, conveniencia ó utilidad».

Tuvo, pues, Monier la intuición del vastísimo campo de aplicaciones del hormigón armado, por más que sólo llegó á construir, aparte de macetones y fuentes, tubos y depósitos de agua. De las formas constructivas por él imaginadas da idea la figura 1.ª, relativa á piezas rectas para trabajar por flexión. En ella se encuentran, aunque en forma rudimentaria y confusa, todos los elementos de armadura hoy usados, y aun algunos otros superfluos.



La venta de las patentes Monier á dos Sociedades alemanas, y los inmediatos estudios de los Ingenieros Koenen y Wayss, sacaron al nuevo material del estado infantil en que la falta de conocimientos de Monier lo dejara. Á Alemania (donde parece que, como en Francia é Inglaterra, tuvo Monier oscuros predecesores), se debe realmente el hormigón

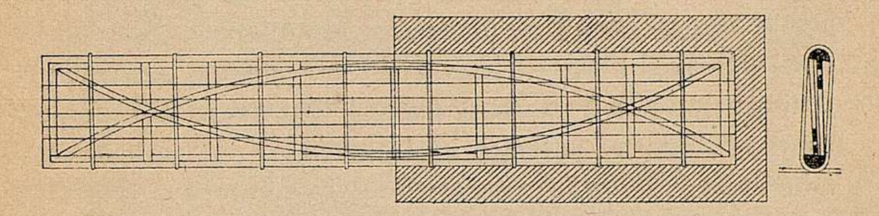


Figura 1.ª

armado. Y mientras Monier quedó olvidado en su patria, en Alemania el nombre *Monierbau*, construcción Monier, es usual como sinónimo de hormigón armado.

En la misma época, 1870-80, los americanos Hyatt y Ransome construyen edificios, en los que, persiguiendo la incombustibilidad *(fireproofing)*, ejecutan vigas y pisos de hormigón armado muy semejantes á los actuales.

Con la misma idea de realizar edificios á prueba de incendio, Cottancin, en 1889, y Coignet y Hennebique, en 1892, obtienen en Francia patentes, en las que nada hay realmente nuevo (1).

(1) El último, cantero en su juventud, contratista después, hombre de gran inteligencia y, sobre todo, de un maravilloso talento comercial, preconiza el empleo de los estribos y barras dobladas; sabe comunicar su entusiasmo á Ingenieros y contratistas, y aprovechar en beneficio propio los resultados de la inteligencia é iniciativa de éstos; y, merced á un constante y hábil sistema de anuncios y autobombos, llega á ser tenido por la mayoría por el verdadero inventor del verdadero hormigón armado, y á realizar enormes ganancias á expensas de



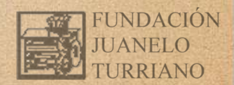
Se multiplican las pseudo invenciones, brotan los llamados sistemas, variantes todos, racionales algunos, infantiles ó disparatados otros, de la única idea fundamental de poner armadura donde el hormigón la necesita. En la competencia industrial que se desarrolla, las patentes no son de invención, sino de corso, para poder cada uno, por variar la posición de un alambre, ó cosa por el estilo, bautizar con su nombre un *sistema* y espigar en el campo sin ser molestado por los demás. Prueba indiscutible: Hennebique demanda á Boussiron, autor de un *sistema,* y á Piketty, Ingeniero, por usurpación de su patente; el Tribunal del Sena sentencia (Marzo de 1903) que la patente Boussiron es nula... y la Hennebique también, por caer ambas dentro de la de Monier.

Al mismo tiempo, hombres de otra altura, como Ritter, von Emperger, Melan y Moersch en Alemania y Suíza, Rabut, Harel de la Noë y Considère en Francia, Talbot en los Estados Unidos, Sanders y Christophe en los Países Bajos, estudian á conciencia, sin pretensiones de inventar, y construyen numerosas y notables obras.

A partir de 1900, el hormigón armado, ya sancionado en obras para la Exposición de París y en otras ejecutadas con motivo de ésta, progresa con maravillosa rapidez. En manos de las Comisiones suíza y alemana primero, de la francesa después, y constantemente en los laboratorios americanos y alemanes, va perdiendo su primitivo carácter puramente empírico, para llegar á ser hoy un material estudiado y conocido como los demás, bien en algunas de sus propiedades, oscuramente en otras.

---

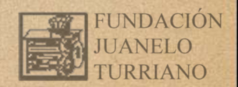
sus numerosos concesionarios. Mientras tanto, Monier, octogenario, está en la miseria, hasta el punto de que Hennebique encabeza una solicitud al Presidente de la República para que conceda á aquél un estanco (1903).



En España, el Ingeniero de Caminos, Nicolau, ensaya en 1891 unas traviesas anegando carriles viejos en hormigón. El Arquitecto Durán y el Ingeniero militar Maciá empiezan, más tarde, á construir algunas obras tipo Monier. El Ingeniero de Caminos, Ribera, al principio concesionario de Hennebique, construye, á partir de 1897, numerosas obras de todas clases, y, desde 1902, libre de la molesta y onerosa tutela de aquél, acomete la ejecución de muchas más, y cada vez más importantes, y algunas, como los sifones del Sosa y de Albelda, en las que colabora otro Ingeniero de Caminos, Luiña, colosales, y las mayores del mundo en su género.

Construyen también varias obras los Ingenieros militares Unciti, Benítez y Gallego y el Arquitecto Jalvo. Las Empresas francesas «Hennebique y Compañía», de Sestao, se sostienen en España, algún tiempo aquélla y próspera ésta, gracias á la colaboración de otros Ingenieros de Caminos, Rebollo y Colás.

El autor, que desde 1893 viene estudiando el hormigón armado, construye varias obras á partir de 1900; lucha en el concurso para la cubierta del depósito del Lozoya, con la satisfacción de triunfar sobre once firmas extranjeras de las más acreditadas, de serle adjudicada la obra en caso de no someterse á ciertas condiciones el vencedor, y de serlo éste solamente por una diferencia de 38.000 pesetas en millón y medio. En otro concurso, para la construcción de embarcaderos de gran altura, sujetos á fuertes cargas dinámicas y de dificultades ante las cuales retrocede Hennebique y propone Sestao hacer de madera lo más importante de la obra, vence á su vez al adjudicatario de la cubierta del Lozoya. Construye después otros dos embarcaderos, de mayor importancia y dificultad, y, entre otras muchas obras para ferrocarriles,



un puente de vigas rectas, con tramos de 26,40 metros de luz, hoy por hoy los mayores en su género.

Hoy la mayoría de los Ingenieros va desechando las prevenciones de años atrás contra el hormigón armado, aunque, en particular, respecto á la influencia de sobrecargas dinámicas, conserven muchos añejas é injustificadas suspicacias. El Estado ha construído, por concurso, numerosas é importantes obras. Las Compañías de ferrocarriles se muestran más rehacias, y, salvo la de los Suburbanos de Málaga, sólo en construcciones de escasa importancia admiten el hormigón armado.

Falta en España una norma que, como las existentes en Alemania, Francia y otros países, regule oficialmente el empleo del hormigón armado.

Al autor le ha cabido la honra de inaugurar en España la enseñanza de «Construcciones de hormigón armado», asignatura incluída en el plan de estudios de la Escuela de Caminos, Canales y Puertos, á partir del curso de 1910-11. Ha procurado dar á esta enseñanza carácter verdaderamente ingenieril; usar de los principios generales de Mecánica y de los resultados experimentales, como *bases*, y del análisis, como *medio* de concordar y sacar partido de ellas, manteniendo entre esos tres elementos una justa ponderación para llegar á la finalidad del Ingeniero: estudiar, proyectar y construir obras de hormigón armado en las mismas condiciones de facilidad y seguridad que las de otro material cualquiera.

El presente libro, compilación de las lecciones dadas en el primer curso, no es sino un ensayo, hecho con la aspiración de resumir lo que hasta el día se conoce y aplica en lo racional y en lo experimental, lo que se encuentra diseminado en multitud de artículos, monografías, informes, etc.,



y en algunas, pocas, obras didácticas, que, en general, pecan por no conservar el justo medio entre la teoría y la práctica, ó por estudiar á fondo unas cosas y superficialmente otras. En suma: un resumen lo más completo que ha sido posible, y hecho teniendo siempre á la vista lo que al Ingeniero importa principalmente: la inmediata aplicación á la práctica.

II

Formas constructivas.

El hormigón armado es la asociación íntima de dos materiales, aglomerado y metal, que se compenetran y sueldan de tal modo que cada uno suple los defectos del otro.

El metal, en forma de barras, de sección muy variada, pero siempre pequeña respecto á la longitud, tiene una resistencia específica muy grande, é igual para la compresión que para la tracción: estable de forma cuando resiste á ésta, flaquea cuando está comprimido, por la flexión lateral ó pandeo.

El hormigón, siempre en masa considerable relativamente al metal, resiste bien á la compresión, medianamente al desgarramiento y mal á la tracción.

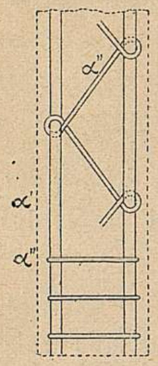
Un cuerpo que resiste por su elasticidad el efecto de fuerzas exteriores, soporta, en general, en cada uno de sus puntos, tres esfuerzos moleculares *principales,* orientados ortogonalmente, unos de compresión y otros de tracción. Las envolventes de cada serie de esfuerzos principales son las superficies de rotura, según cada una de las cuales se fragmenta el sólido bajo la acción de los esfuerzos normales á la misma.

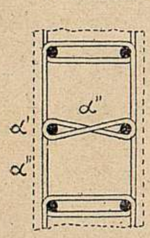
En el caso práctico general, piezas prismáticas y fuerzas



contenidas en un plano, las superficies son cilíndricas y se reducen á dos series: las envolventes de las máximas compresiones son las superficies de rotura por tracción, y, recíprocamente, las de las máximas extensiones son las superficies de rotura por compresión.

Las armaduras, perfiladas según la sección recta de las superficies de máxima tracción, es decir, según las líneas del mismo nombre, dan, en general, la solución más perfecta del problema: trabajan exclusivamente por extensión; absorben ellas solas todos los esfuerzos de este género; el hormigón sólo tiene que resistir los de compresión; aquéllas y éste pueden tener la sección estricta que á su resistencia específica corresponde.





Esta solución ideal del problema no es factible en la mayoría de los casos. En lugar de un solo sistema de armaduras hay que poner dos, ó tres, más sencillos, que se complementan, resistiendo separadamente á las componentes de los esfuerzos principales de tensión; y también, á veces, conviene exagerar la resistencia á la compresión y poner armaduras orientadas en su sentido.

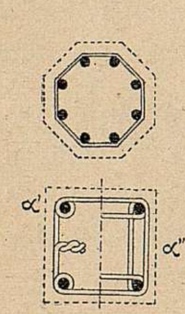


Figura 2.ª

Examinemos sucesivamente las formas constructivas típicas que prácticamente afecta el hormigón armado. Suponemos, para mayor sencillez, que las barras son redondas, aunque pueden tener secciones muy variadas.

Piezas comprimidas.—Hay una armadura longitudinal, que por estar así orientada llamaremos siempre *primaria* (fig. 2.ª), compuesta por ba-



rras α', simétricamente colocadas, por lo general, que suman su resistencia á la del hormigón. Para combatir los esfuerzos de tensión que el henchimiento transversal origina, se dispone una armadura *secundaria*, de barras α'', que puede llegar á ser mucho más eficaz que la primaria, al multiplicar el número de barras, constituyéndose entonces el hormigón *zunchado* que en el capítulo VIII estudiaremos.

Piezas extendidas.—Cuando son rectas tienen la misma α' que las comprimidas, y análoga α'', destinada entonces á favorecer la trabazón del conglomerado. Si son curvas (tubos) (fig. 3.ª), las barras secundarias, ó de *repartición*, α'',

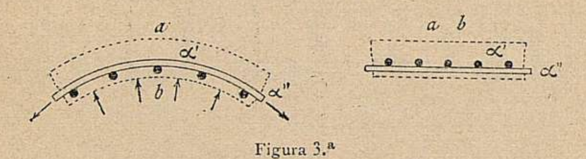


Figura 3.ª

transmiten el efecto de las fuerzas á las primarias α', que soportan las tensiones totales desarrolladas.

Piezas sometidas á flexión sencilla.—La armadura primaria puede ser *asimétrica*, *disimétrica*, ó *simétrica* (figuras 4.ª, 5.ª y 6.ª).

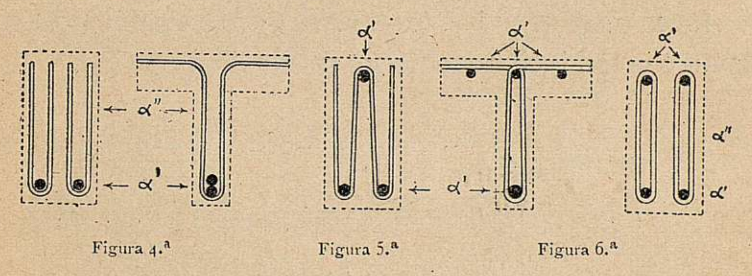


Figura 4.ª Figura 5.ª Figura 6.ª

Si el momento flector no cambia de signo, la α' rectilínea puede bastar; α'', siempre necesaria, salvo en las piezas de muy pequeño peralte (losas), afecta cualquiera de las formas



indicadas, y sirve para contrarrestar los esfuerzos principales de tensión oblicua que dependen de los cortantes. La separación de los grupos α'' es invariable, por tanto, en la figura 7.ª, y creciente hacia el centro en la 8.ª

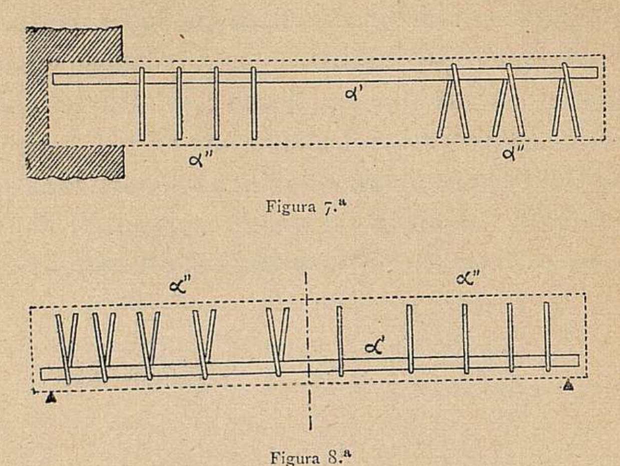


Figura 7.ª

Figura 8.ª

Pero, en general, se aprovecha también para aquel objeto la misma α', cuya sección, determinada por el máximo del momento flector, *M,* va resultando excesiva á medida que aquél decrece; se doblan en forma redondeada ó acodada, todas, ó algunas de las barras, en una misma ó en diversas secciones (figs. 9.ª y 10). Las formas de la figura 9.ª se aproximan ó envuelven á las líneas de máxima tensión.

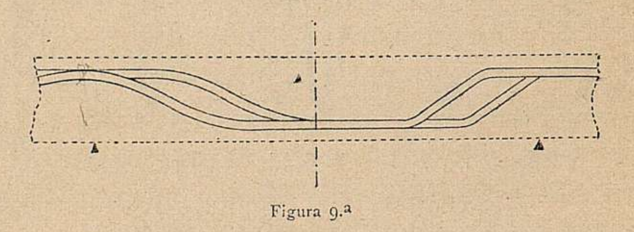


Figura 9.ª

Cuando las dimensiones superficiales son grandes respecto á las verticales, se necesita una armadura complemen-

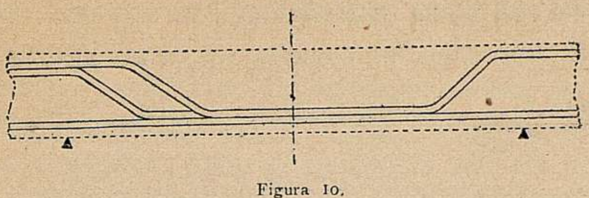


Figura 10.

taria ó de *repartición* α''', normal á α' (fig. 11), que se convierte en una segunda primaria, α'_1, cuando la flexión puede operarse en dos sentidos normales (losas apoyadas en su contorno); las dos, α' y α'_1, admiten el doblado de las figuras 9 y 10.

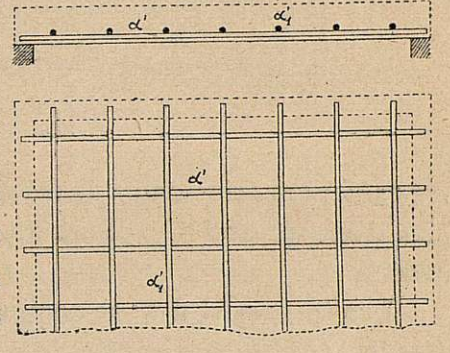


Figura 11.

Cuando *M* cambia de signo, cabe oponerle una nueva α', (fig. 12), limitada á los trozos en que el signo es contrario, ó extendida, en forma disimétrica, á toda

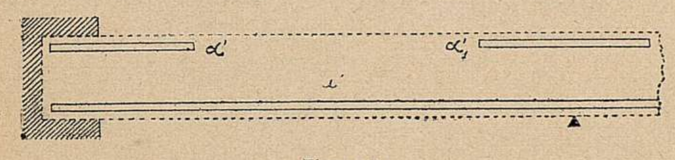


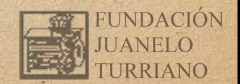
Figura 12.

la longitud, ó bien hacer las dos cosas á la vez (fig. 13), y



Figura 13.

combinarlas separada, ó juntamente, con el doblado de α'



(figuras 14 y 15). Cabe también emplear la forma simétrica corrida, en cuyo caso, así como en los de las figuras 12 y 13,

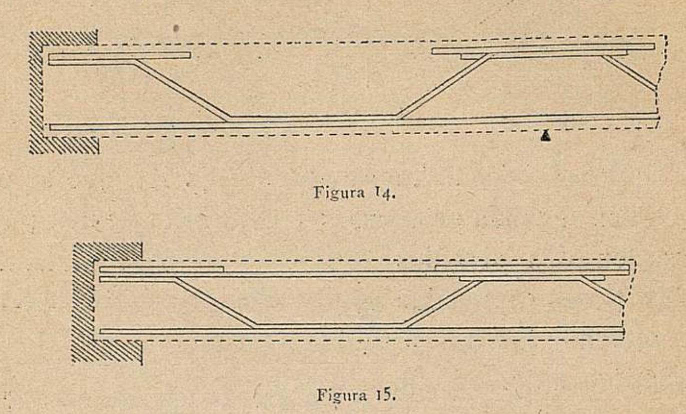


Figura 14.

Figura 15.

los esfuerzos principales de tracción deben ser resistidos exclusivamente por α'', siempre necesaria en menor ó mayor grado.

Las formas 11 á 15 se combinan con las 4 á 10, para formar los pisos con nervios, de sección en T, en los que la losa ó forjado trabaja por compresión paralelamente al nervio, y por flexión, normalmente al mismo. Los nervios pue-

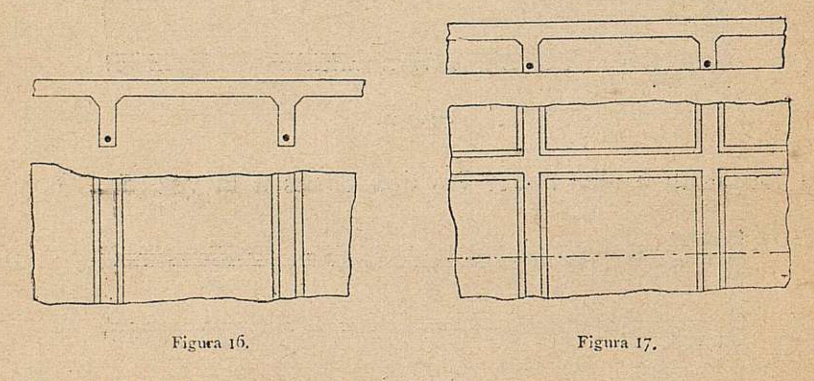


Figura 16. Figura 17.

den existir sólo en una dirección (fig. 16) ó en dos ortogonales (fig. 17); la armadura de repartición α''', siempre conve-

niente en el primer caso, se convierte en el segundo en una doble primaria α'_1.

Piezas sujetas á flexión compuesta.—Pueden tener las tres formas (figs. 4.ª, 5.ª y 6.ª), y más comúnmente la simétrica, ó la te disimétrica de la figura 5.ª

Entramados.—Compuestos por piezas en general simétricas, sometidas cada una á compresión ó tracción sencillas, más la flexión debida á su propio peso.

La variedad de formas elementales es grande: combinada con la de formas de sección de las armaduras, de unión entre los elementos de éstas, etc., se comprende que haya dado lugar á tantísimas combinaciones, pomposa y falsamente llamadas *sistemas*.

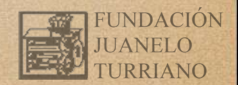
Para nosotros no hay más que un solo sistema: el de poner armadura *donde y en la forma* que un estudio atento de las deformaciones que cada pieza ha de sufrir, *por su trabajo propio y por su enlace con las contiguas,* revele que el hormigón necesita ayuda. Ese sistema no es de nadie, y es de todos los que saben Mecánica aplicada á la construcción.

III

Características generales.

La existencia del hormigón armado se debe exclusivamente á la propiedad de adherirse con energía sus dos elementos, que, así soldados, forman un conjunto monolítico, suma de las buenas cualidades de ambos con exclusión de sus defectos.

La adherencia resulta de la formación alrededor de cada barra de una costra delgada, de silicatos y aluminatos de hierro y ferratos cálcicos, en íntimo contacto con aquélla, y



en más íntimo, aún, por la desigualdad de superficie lateral, con el conglomerado. Esa costra, formada durante el fraguado y oprimida contra las barras por la contracción que en general sufre el hormigón durante aquél, es química y físicamente estable.

Químicamente preserva al hierro de la herrumbre, ó en general, del ataque por los cuerpos que disueltos en agua pueden empapar el hormigón. La acción, continuada durante largo período, del agua del mar, *parece,* aunque no puede todavía afirmarse de un modo absoluto, que no origina corrosión, siempre que el conglomerado sea *suficientemente compacto y rico en cemento.* No sólo no se produce herrumbre, sino que se reduce y desaparece ésta, si las barras la tenían antes de ser hormigonadas. El hierro se conserva indefinidamente y, al romper un trozo de hormigón armado aparece aquél limpio, con su brillo metálico característico, aun en el caso de haberlo hormigonado con algo de herrumbre, y en el de haber estado el hormigón muchos años en contacto con aguas nada limpias.

Físicamente, la adherencia crece con el tiempo, á compás de la resistencia específica del hormigón, rápidamente al principio, lentamente después, hasta alcanzar su máximo al cabo de algunos años. Ni trepidaciones ni vibraciones, por fuertes y continuadas que sean, destruyen ni aminoran la adherencia, como no alteran la resistencia del hormigón.

Numerosos puentes para ferrocarril, de toda clase de tipos y de luces, en servicio muchos de ellos desde hace quince años y en perfecto estado, lo demuestran plenamente, así como medidas directas de la adherencia, hechas por la Comisión francesa, en traviesas después de varios años de servicio en vías de fuerte tráfico. Experimentos hechos en la Universidad de Pensilvania han dado la misma carga total



de rotura en unas vigas después de 1.140.000 repeticiones de cargas mayores que la de servicio; y en otras, idénticas, sin carga anterior alguna.

Las alternativas de humedad y sequedad, que tienden á producir alargamiento y contracción en el conglomerado, y los cambios de temperatura, que por la diferencia, aunque pequeña, de coeficientes de dilatación, tienden al mismo efecto, de alargar ó de contraer el hormigón relativamente á la armadura, en nada afectan tampoco, ni á la corta, ni á la larga, á la mutua adherencia.

La asociación íntima de los dos elementos hormigón y armadura, es permanentemente estable: bien hecho el hormigón armado, se conserva, y conserva sus cualidades, indefinidamente en lo que cabe.

Pasemos revista á sus ventajas é inconvenientes, en comparación con las fábricas y los metales.

La adaptabilidad á las más variadas formas, fáciles de obtener por moldeo, *en una sola pieza,* sin los complicados despiezos de la fábrica, ni los difíciles ensambles de las obras metálicas, es la cualidad más característica del hormigón armado. Lo de menos, con ser mucho, es economizar tiempo y dinero y poder realizar las más caprichosas y fantásticas, ó racionales y difíciles, formas constructivas; lo esencial é inapreciable es la supresión del enemigo de toda construcción: la junta.

En la fábrica, las juntas facilitan la acción de los agentes atmosféricos hasta en el interior de la masa; tarde ó temprano, en ellas se desarrollan ciertos vegetales, cuyo crecimiento acaba por dislocar las más pesadas piedras. Las juntas, en una construcción metálica, son peores aún; por bien ejecutadas que estén, constituyen otras tantas secciones débiles, que, bajo la acción de esfuerzos dinámicos, tienden á



debilitarse más y más, á acentuar, por tanto, aquella acción y á ser una causa de ruina si no se conservan y reparan con frecuencia.

Frente á esos defectos, opone el hormigón armado su cualidad por excelencia: la *solidaridad*.

Una obra de hormigón armado, bien construída, forma *una sola pieza;* todos sus elementos participan más ó menos, pero siempre algo, del efecto producido por una causa local que directamente afecte á uno solo de ellos; todos, en mayor ó menor grado, vienen en ayuda de aquél, y entre todos contrarrestan y absorben el efecto de aquella causa.

De lo cual resulta una resistencia grandísima á los esfuerzos de cualquier género, y, en particular, á los dinámicos. Las juntas limitan la propagación de esfuerzos locales por la masa de una fábrica; en las construcciones metálicas no la limitan del todo, pero sí la debilitan, y, además, dan origen, en general, á esfuerzos secundarios que fatigan las piezas, á veces tanto ó más que los esfuerzos principales.

De esa mutua ayuda de los elementos del hormigón armado, que es la realización práctica del «todos para uno y uno para todos», resulta una deformabilidad local y general pequeñísima, es decir, una rigidez muy grande.

Al mismo tiempo, la masa de una obra de hormigón armado es siempre de ocho á diez veces superior á la de una construcción metálica de igual sobrecarga y vano. Los dos elementos, masa y rigidez, se aunan para aminorar en grandísima escala las vibraciones producidas por agentes dinámicos. Una obra metálica, más deformable, mucho más ligera y llena de juntas, sufre bajo tales sobrecargas un régimen vibratorio muchísimo más intenso que una obra similar de hormigón armado.

La figura 18 reproduce los gráficos obtenidos en: *a)*, el



puente metálico Lépine, de 45 metros de luz y 15,50 de ancho, bajo la acción de 16 hombres al paso gimnástico; y *b)*, el puente de hormigón armado de Chatellerault, de arcos de

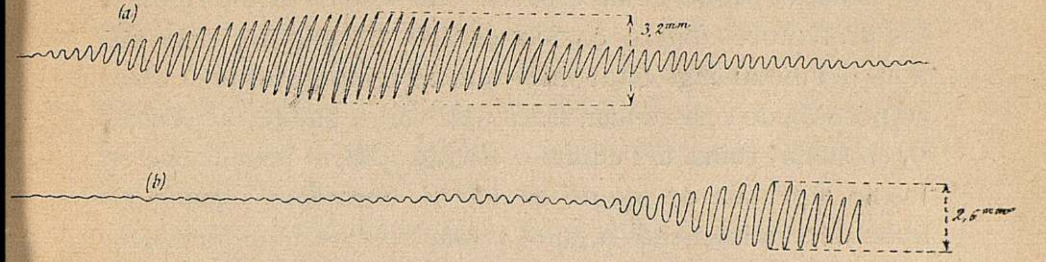


Figura 18.

50 metros de luz y 8 de ancho solamente, sometido al paso gimnástico, pero de 250 hombres en lugar de 16.

La relación de amplitud de las vibraciones es de $\frac{2,6}{3,2}$ $= 0,813$ en valor absoluto, que, *á igualdad* de luz, anchura y sobrecarga, se reduce á

$$0,813 \times \frac{45^2 \times 8 \times 16}{50^2 \times 15,5 \times 250} = 0,0218 = \frac{1}{46}$$

guarismo harto elocuente, que da una idea clara de la influencia de los tres elementos, masa, y, sobre todo, rigidez y solidaridad.

En el terremoto de San Francisco, los únicos edificios que, aun con averías más ó menos importantes, pudieron ser, unos demolidos metódicamente, otros reparados, fueron los de hormigón armado.

Las variaciones de temperatura, como demostraremos, en nada alteran el equilibrio molecular del hormigón armado, se propagan lentamente á través de él, en razón á su mala conductibilidad, á su gran calor específico y á su masa, á la inversa de los materiales metálicos. Los colosales incen-



dios de Boston y de San Francisco han demostrado la superioridad incontestable del hormigón armado sobre todas las construcciones tituladas á prueba de incendio. Mientras que en éstas, la pequeñez de espesor y de sección de los elementos protectores (barro cocido, estuco, hormigón), respecto á los del metal englobado, hizo que las temperaturas de éste, su pérdida de resistencia, flexión de vigas, pandeo de pilares y, en suma, ruina del edificio, fueran casi lo mismo que en los no á prueba de fuego, en los de hormigón armado no hubo derrumbamiento alguno y sólo averías de importancia relativamente pequeña, que no implicaron sino reparaciones, nunca reedificaciones.

La influencia de la dilatación del hormigón armado sobre su estabilidad, tema sobre el que tanto falso ó erróneo se ha dicho, no es mayor que la relativa á una obra de fábrica y sí bastante menor que la de una obra metálica. En todas, cualquiera que sea el material (los coeficientes difieren bastante poco; lo que más influye es la masa y la conductibilidad), la dilatación es un fenómeno físico que hay que tener muy en cuenta en determinadas circunstancias, adoptando disposiciones adecuadas para que no constituya una causa de destrucción.

Otras causas que producen alteraciones de volumen del hormigón armado, existen y causan ciertos inconvenientes que estudiaremos.

La ventaja económica del hormigón armado sobre los demás materiales constructivos, no es absoluta en todos los casos; pero sí, en general, en la mayoría de ellos. Las arenas, gravas, cementos, armaduras, se transportan fácil y económicamente; el hormigón se maneja dentro de la obra en iguales condiciones, sin necesidad de los costosos medios mecánicos que exigen las grandes piedras ó las piezas metá-



licas, pesadas y de grandes dimensiones. La unión de estos grandes elementos es difícil y delicada: la de las armaduras del hormigón armado requiere algún cuidado, pero es sencilla, como lo es el apisonado, y poco dispendiosa. La mano de obra, en suma, es, en general, mucho menor, aun incluyendo la relativamente grande que implica la construcción y desmonte de los moldes. Así se ha extendido en tan enorme escala el empleo del hormigón armado en el país de más costosa mano de obra: los Estados Unidos.

La necesidad del moldeo; la pérdida de tiempo durante el fraguado; la sujeción de no hormigonar durante los grandes fríos, ó de hacerlo con especiales precauciones; la necesidad de una vigilancia muy asidua para evitar defectos de hormigonado, por incuria ó mala fe de los obreros, son inconvenientes del hormigón armado, que aminoran en parte sus ventajas.

Se exagera por muchos la poca belleza, la fealdad, á veces, de las construcciones de hormigón armado. Desde luego no es un material arquitectónico, cuyas líneas fundamentales formen por sí solas un conjunto agradable á la vista; es un material de carácter esencialmente utilitario; el aspecto está, lógicamente, subordinado á la economía.

Cabe, sin embargo, y sin necesidad de falsear nada con revestimientos que simulen piedra, ó con ornamentos postizos, obtener cierta belleza *sui géneris,* resultante de una buena combinación de líneas y de dimensiones.

Cabe, por último, gracias á la plasticidad del hormigón, ornamentar con mayor libertad que con ningún otro material, dando las formas más variadas, puede decirse sin traba alguna; pero siempre será falsear la verdad.

El hormigón armado tiene campo de aplicaciones vastísimo, en las que, sin subterfugios, por sus especiales condi-



ciones, resulta el material más conveniente, *en general,* y en la mayoría de los casos particulares. No es, sin embargo, ni mucho menos, una panacea que, en todo caso y circunstancia, conduzca á lo más ventajoso. Transcurrirán siglos, y continuarán usándose todos los materiales, desde el tapial hasta el mármol, de la madera al acero, y cada cual resultará el más apropiado, según el destino y condiciones de la obra á que se aplique.



CAPÍTULO II

RESISTENCIA Y ELASTICIDAD DEL HORMIGÓN ARMADO

I

Hormigones.

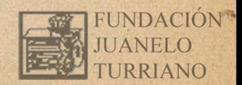
El material que reúne en grado máximo las condiciones de resistencia, monolitismo, adaptabilidad á cualquier forma y economía, es el hormigón. Este nombre genérico comprende todos los materiales constituídos por:

a) Un esqueleto formado por un *árido*, material pétreo en numerosos fragmentos de diversos tamaños; y

b) Un aglomerante, cuerpo en polvo fino, que rellena parcial ó totalmente los huecos entre los elementos del árido, y que, por su combinación con el agua, se solidifica, formando una trama que engloba y suelda enérgicamente dichos elementos.

Del tamaño máximo de éstos depende solamente la distinción entre hormigones, propiamente dichos, y morteros. En unos, el árido es la mezcla de elementos pequeños, p, (arena), con otros más gruesos, g, (grava ó piedra partida), soldados todos por el cemento, c, combinado con el agua, a; en los morteros faltan los elementos g.

En general, el conglomerado no resulta absolutamente macizo, sino con oquedades ó vacíos, v. Si todas estas letras designan no sólo cada clase de elementos, sino también los



respectivos volúmenes absolutos que entran en la unidad de volumen del conglomerado, es decir, si $1 = g + p + c + a + v$ (hormigón), ó $1 = p + c + a + v$, (mortero), la *compacidad* se mide por las sumas $(g + p + c)$, ó $(p + c)$, de todos los elementos sólidos, en fragmentos ó en polvo.

La experiencia demuestra que cualesquiera que sean la naturaleza y tamaño de los elementos p y g, y las proporciones relativas de los c, a, p y g, las resistencias del conglomerado, á igualdad de las demás condiciones, sólo dependen de las relaciones $\left(\frac{c}{1-(p+g)}\right)^2$ ó $\left(\frac{c}{1-p}\right)^2$

Esta ley, descubierta por Féret, es suficientemente exacta, mientras el tamaño de los elementos g no excede de 2 á 2,5 centímetros.

Las diferencias $1-(p+g)$, ó $1-p$, miden el total de huecos existentes en la unidad de volumen del árido, total que importa reducir á un mínimo para obtener con la misma riqueza de cemento, c, la mayor resistencia posible, ó una resistencia dada con el menor gasto de cemento.

La forma de los elementos del árido influye en la proporción de huecos, que es de 8 á 12 por 100 superior en los angulosos á los redondeados, á igualdad aproximada de tamaño de todos aquéllos.

Igualmente influye el tamaño absoluto de los elementos: á medida que decrece, aumenta, á igualdad de forma, el volumen de los vacíos.

El tamaño relativo influye más todavía. Si todos los elementos son iguales, los huecos suman un máximo. Si sus tamaños son distintos, los vacíos decrecen á medida que hay más diferencia entre los tamaños menores y mayores, y que al mismo tiempo escasean ó faltan los elementos de gruesos intermedios.



Prácticamente se obtiene el mínimo de huecos y, por consiguiente, el máximo de compacidad y resistencia para una proporción dada de cemento, haciendo:

a) En un mortero, que falten los granos intermedios de la arena, y que el volumen absoluto de los elementos gruesos doble próximamente el de los finos;

b) En un hormigón, que las piedras doblen, igualmente, en volumen absoluto, la arena.

Y en ambos, que los elementos, gruesos y finos, piedra y arena, sean redondeados y, dentro de cada clase, de tamaño lo más uniforme y lo más grande posible.

La forma redondeada ejerce también otra influencia: la de facilitar el apisonado, por resbalar fácilmente unos elementos sobre otros; mientras que los fragmentos angulosos se acodalan y, á menos de un apisonado sumamente enérgico, dejan huecos sin rellenar.

Durante mucho tiempo se ha creído que las arenas y piedras angulosas, de superficie mayor y más áspera que las redondeadas, se adherían con mayor fuerza al aglomerante y daban morteros y hormigones más resistentes. La experiencia demuestra lo contrario, que ya es sabido por todos. La adherencia por unidad superficial es mayor sobre las superficies redondeadas; lo que, unido á la mayor eficacia del apisonado, explica la ventaja que con elementos rodados se obtiene.

La gravilla rodada, de granos entre 1 y 2,5 centímetros de dimensión máxima, pesa por metro cúbico aparente unos 1.600 kilogramos, y presenta vacíos de 38 por 100. La piedra partida, de análogo escantillón, sólo pesa, siendo silícea, 1.450, con 46 por 100 de huecos.

Las arenas silíceas rodadas, clasificados sus granos en: gruesos, de 5 á 2 milímetros; medios, entre 2 y 0,5, y finos,



de menos de 0,5; tienen, análogamente, 1.580 y 40 por 100; 1.420 y 45 por 100; 1.230 y 52 por 100.

Los guarismos anteriores se refieren á arenas secas. La humedad hace que el volumen aparente y, por tanto, los huecos, aumenten en proporciones tanto mayores cuanto más finos sean los granos. Un mismo peso de arena con 1, 2, 3, 5 por 100 de agua, afecta hasta 1,19, 1,23, 1,24 y 1,26 veces el volumen que presenta completamente seca, supuesto que siempre se vierta desde pequeña altura. En las gravillas la influencia es mucho menor.

Los buenos cementos artificiales de fraguado lento, únicos que deben entrar en el hormigón armado (salvo casos especiales), tienen, gracias á la finura de su molido, una densidad aparente de 1,20, mientras que la absoluta es de 3,10 (promedios ambos), á lo que corresponde un 60 por 100 de huecos, que aminora si son sacudidos, ó vertidos desde alto.

Por lo dicho se comprende cuán incierta es la dosificación de un aglomerado, si sólo se define por los volúmenes $c : p : g$, reducidos usualmente á la forma $1 : p' : g'$. De la manera de medir los dos primeros y hasta de la forma y tamaño de la medida para el cemento, y del grado de humedad que tenga la arena, podrán resultar variaciones muy grandes en la compacidad y resistencia.

El cemento debe siempre ser dosificado en peso, lo que es fácil, por tenerlo fijo las unidades en que se compra: 50 kilogramos los sacos y 170 las barricas. Para la grava y arena conviene hacer medidas cúbicas, cuyos volúmenes sean los correlativos á uno ó más sacos, ó barricas, de cemento. La influencia del grado de humedad de la arena se corrige por la práctica adquirida, midiéndola rasa ó con cierto colmo.

Las proporciones más usuales de arena y grava difieren



poco de la aceptada como tipo por la Comisión francesa: 400 y 800 litros respectivamente, con una cantidad de cemento variable entre 300 y 400 kilogramos; todo lo cual, bien apisonado, viene á dar, con ligero exceso, un metro cúbico.

En ciertas partes de obra, en las que hay grandes espesores y armaduras bastante espaciadas, no sólo es admisible, sino ventajoso, forzar el tamaño de las piedras, y en otras, cuyo trabajo haya de ser moderado, rebajar el cemento á 250 ó 225 kilogramos.

El hormigón tipo, al que, salvo indicación contraria, nos referiremos siempre, es el de 300 kilogramos. Como ya hemos visto, con esa misma riqueza puede variar mucho la compacidad, según las composiciones granulométricas de los áridos. En cada caso, lo conveniente será determinar los volúmenes en vista de las condiciones de la arena y grava disponibles, á fin de obtener la mayor compacidad, cribando aquéllas si es necesario.

Las proporciones 400 : 800, dan con los vacíos medios de 0,43 y 0,38, $p + g = 228 + 496 = 724$ litros absolutos por metro cúbico.

El agua necesaria para el fraguado es, término medio, 0,30 del peso del cemento. Además se necesita otra cantidad, variable según el estado higrométrico y finura de la arena, que hace á modo de lubrificante mientras se amasa, y que luego, en parte se evapora y en parte queda retenida en el conglomerado.

El volumen absoluto del cemento no cambia sensiblemente con el fraguado, y con un 40 por 100 en total de agua, química y físicamente retenida (la cantidad total durante el amasado es bastante mayor y puede alcanzar á 80 y 100 por 100 del peso de cemento), es, por kilogramo, $\frac{1}{3,1} + 0,40$



= 0,72 litros. A los 300, 350 y 400 kg. corresponden 216, 252 y 288 litros, y en total, para los conglomerados respectivos, 940, 976 y 1.006, volúmenes absolutos por metro cúbico; es decir, que sólo el último se puede considerar impermeable, y que los dos primeros tienen 6 y 2,4 por 100 de poros.

Expresadas en volumen las tres dosificaciones, vienen á ser: 1 : 1,9 : 3,8; 1 : 1,6 : 3,2, y 1 : 1,4 : 2,8.

La influencia de la cantidad de agua no es muy grande; hay una proporción óptima, á igualdad de riqueza, composición del árido, apisonado, etc., que da el máximo de resistencia, disminuyendo ésta más rápidamente cuando la proporción es escasa que cuando sobrada. El exceso de agua produce más bien un retraso en el desarrollo de la resistencia, que, en largo período, tiende á igualarse con la máxima.

Según la proporción de agua, se puede llamar la consistencia del hormigón: *plástica,* cuando, oprimido en la mano, se puede formar con él una bola que sólo resuda ligeramente, y que, abandonada, conserva bien su forma; *jugosa,* cuando la resudación es abundante y la forma se conserva difícilmente; *fluida,* cuando el aspecto es el de un líquido muy espeso, y *seca,* cuando la bola formada en la mano se desmorona al soltarla.

Corresponde experimentalmente la óptima proporción de agua á una consistencia casi igual, por defecto, á la plástica. Los números que la expresan, dependientes, sobre todo, de la calidad y estado de la arena, son bastante variables: de 8 á 12 por 100 del peso total de cemento, arena y grava, entre 180 y 220 litros por metro cúbico.

Durante muchos años se ha preconizado la bondad de la consistencia seca, agregando la necesidad de un enérgico apisonado; la experiencia ha demostrado que es preferible la consistencia plástica y aun la jugosa.



La adherencia entre el hormigón y la armadura estriba en la formación de una costra, rica en cemento, que recubra perfectamente las barras metálicas, costra que se forma por resudación, fácilmente si el conglomerado es jugoso; lo mismo, pero gracias al apisonado, si es plástico, y difícilmente si es seco. Mucho más que la resistencia, cuyas variaciones no son muy grandes, importa la adherencia, que es la clave del hormigón armado, y preferible es pecar por un ligero exceso de agua, siempre que no llegue á desvirtuar la eficacia del apisonado.

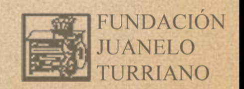
El exceso de agua buenamente admisible depende mucho de la forma y volumen de la pieza y de la relación entre su perímetro y sección. En piezas voluminosas debe aquél ser menor que en las medianas y pequeñas, que, á igualdad de masa, presentan mayor superficie lateral para eliminar el exceso por resudación y evaporación.

Depende también la cantidad de agua de la temperatura exterior, y debe ser aumentada ó disminuída según que la evaporación pueda ser más ó menos activa.

Todas estas variaciones, sólo por la práctica pueden ser determinadas.

La influencia del apisonado, sobre la compacidad y resistencia es muy grande; gracias á él, los elementos de un cierto grueso del árido van rellenando los huecos entre los elementos de tamaño superior, poniéndose unos y otros en contacto íntimo y soldándose por intermedio de la capa de pasta y de elementos más finos que debe revestir la superficie de todos.

Un apisonado á golpes no muy fuertes, pero sí muy repetidos, es preferible al inverso; conviene que los golpes se vayan localizando en pequeñas extensiones y no que, al ser muy intensos, se transmitan lateralmente á partes ya api-



sonadas, destruyendo el encaje conseguido entre sus elementos.

En ciertas obras, ó partes de ellas, bien por aglomerarse en pequeño espacio las armaduras, bien por presentar formas especiales, se hace difícil ó imposible un eficaz apisonado; conviene, para asegurarse de la adherencia, recubrir las barras con mortero rico, 1 : 1,5, ó emplear en esas partes un hormigón de consistencia fluida, pero más rico en cemento, y si no apisonar, sacudir fuertemente la masa para establecer el mejor contacto posible entre hormigón y armadura.

La influencia de la calidad del cemento se comprende. Los de escoria son inadmisibles por no llegar nunca á dar adherencia bastante y muchas veces por atacar químicamente al hierro. Los naturales, lentos ó rápidos no tienen, en general, ni la resistencia ni la uniformidad de composición necesarias; en los últimos, además, la adherencia suele ser escasa, y el fraguado, excesivamente rápido, los hace de difícil empleo, salvo en casos especiales en forma de hormigón rico y fluido.

Las piedras y arenas preferibles son las silíceas, mucho más resistentes que las calizas, y deben estar bien limpias, particularmente la arena. La arcilla, que suele acompañar á estos materiales extraídos de ríos, tiene una influencia extraordinariamente perjudicial cuando está en grumos, aunque sean pequeños. En cambio, si sólo existe en forma de limo finísimo que reviste uniformemente de polvo los granos de arena, parece, á juzgar por experimentos hechos en América, que no sólo no perjudica, sino que hasta exalta la resistencia del hormigón.

Otros experimentos, ya antiguos, han demostrado que si se incorpora á un cemento un cuerpo inerte, con el mismo grado de finura de molido que aquél, la resistencia de la mez-



cla se conserva, dentro de ciertos límites de proporción entre ambos elementos, igual á la del cemento puro, y á veces resulta mayor. Cada grano inerte, recubierto por el polvo más fino del cemento, viene á constituir un centro de agregación idéntico al que forman los granos más gruesos del mismo. Algo parecido á esto puede explicar el efecto de la arcilla en un extremado grado de división.

Se pueden, por tanto, admitir arenas y gravas arcillosas, siempre que lo sean de un modo uniforme; es decir, que la arcilla *sólo* esté en forma de polvo finísimo, uniformemente repartido en la masa, nunca en forma de granos ó grumos de tamaño apreciable.

La influencia de la temperatura se traduce por aceleración ó retardo del fraguado y evaporación más ó menos activa del exceso de agua que es necesario para el amasado. Con temperaturas próximas á 0°, lo prudente es suspender el hormigonado. Sin embargo, si hay urgencia, se puede continuar hasta con temperaturas de —10 á —15°, empleando agua tibia con carbonato sódico al 8 por 100, cuya acción química, aceleradora del fraguado, compensa la de tan baja temperatura. Pero no es prudente, repetimos, recurrir á este medio sino en caso extraordinario, y ejerciendo una vigilancia estrechísima, y tomando las mayores precauciones para sustraer, en lo posible, el hormigón ya moldeado, de la acción del frío.

La calidad del agua es un factor de importancia. No hay inconveniente en usar aguas turbias por contener limo arcilloso en suspensión. En cambio, son inadmisibles las aguas *gordas* selenitosas y, sobre todo, magnésicas: los sulfatos cálcico y magnésico, en particular el último, producen reacciones químicas muy perjudiciales durante y después del fraguado.



El efecto del agua del mar es ya conocido de un modo, si no absoluto, prácticamente convincente. Desde luego debe proscribirse su empleo para el amasado, pues con ella se determina un principio de ataque en las armaduras. Los hormigones de riqueza inferior á 400 kilogramos son siempre porosos y permeables; permiten que la acción química de las sales magnésicas se vaya ejerciendo dentro de la masa y, en particular, en las zonas inmediatas á las armaduras, en las que se producen fenómenos de electrolisis con corrosión de las mismas. Los hormigones compactos de más de 400 kilogramos, prácticamente 450 kilogramos por lo menos, bien en toda la masa, bien solamente en la periferia de las piezas, evitan esa acción en el interior y protegen las armaduras en absoluto, si el espesor que las recubre es siquiera de 2 á 3 centímetros. Restos de pilotes de hormigón armado, abandonados durante siete años en la playa de Southampton, alternativamente cubiertos y descubiertos por el juego de mareas, es decir, en las más favorables condiciones para la corrosión de las armaduras, las tenían enteramente transformadas en herrumbre en 6 ó 7 milímetros, á partir de las secciones del hormigón y enteramente limpias, con brillo metálico, con perfecta adherencia, á contar de unos 15 milímetros. La perfecta conservación de numerosos muelles en agua salada, en Francia y en Inglaterra, que datan de seis á doce años, no deja lugar á duda.

La influencia del amasado es grandísima; precisa llegar, en lo posible, á que cada grano de arena esté perfectamente recubierto de pasta y cada piedra uniformemente revestida por pasta y por granos de tamaño inferior. Sea á brazo, sea á máquina, debe siempre efectuarse una mezcla íntima *en seco* de los tres materiales, y, preferiblemente, primero del cemento y arena y después del conjunto con la piedra, y no



añadir el agua sino á la mezcla íntima total, poco á poco, del modo más uniforme posible, y continuando el batido hasta obtener una masa bien homogénea. En general, salvo para obras de extraordinaria importancia, es preferible el amasado á brazo, hecho por operarios prácticos y bien vigilados.

Los moldes influyen bastante en la bondad del resultado; deben tener suficiente rigidez para que en cada punto la acción del apisonado se circunscriba á una zona limitada en lugar de transmitirse lateralmente; sólo así se logra en la masa de las piezas, y particularmente en sus paramentos, la compacidad necesaria.

La impermeabilidad del hormigón puede decirse que no es absoluta, á menos de forzar mucho la riqueza en cemento, y, también, de admitir en la arena una buena parte de granos finos. Los hormigones tipos, aun el de 400 kilogramos por metro cúbico, son permeables, aunque su composición granulométrica sea muy buena; pero las mismas filtraciones á que dejan paso van obturando poco á poco los poros, sobre todo si las aguas son turbias ó ricas en sales cálcicas carbonatadas. De todos modos es preciso lograr la impermeabilidad más pronta y seguramente por la adición de un enlucido de mortero rico de 700 á 800 kilogramos de cemento por metro cúbico de arena, abundante en granos finos y amasado bastante jugoso. Esto es preferible á forzar la riqueza de toda la masa á 450 ó más kilogramos.

Para obras en agua salada esa riqueza es necesaria, por lo menos en la periferia, si las piezas son gruesas, preferiblemente en toda la sección. El alquitrán mineral, aplicado en caliente como pintura en tres ó cuatro manos, ó bien por inmersión de las piezas, penetra algunos centímetros, rellenando los huecos y poros, y formando una envolvente bien impermeable y que el agua no moja. No parece que modi-

fique la adherencia á la armadura, ni tampoco la resistencia del hormigón. Su uso es muy recomendable, como una nueva garantía, aun con hormigón de 450 kilogramos.

II

Armaduras.

En las primeras obras de hormigón armado, el hierro dulce constituyó exclusivamente las armaduras. Aun en 1899, al publicar Considère sus estudios, al hierro dulce se refirió principalmente, y por excepción estudió, aunque poco, el acero dulce, como término opuesto en la serie de los metales ferrosos.

Ni uno ni otro convienen, ni son empleados hoy día, salvo en los Estados Unidos, donde el acero duro, (*high carbon steel*), goza de cierta boga.

La constante física que mejor caracteriza los diversos metales ferrosos es la carga límite de elasticidad, variable desde 1.600 á 1.800 kilogramos por centímetro cuadrado en los hierros dulces, hasta 4.500 y 5.000 en los aceros duros sin templar (el temple puede casi duplicar esos valores).

El coeficiente de elasticidad, 18 á 20×10^5, ó 2.000.000 kilogramos por centímetro cuadrado en los primeros, está muy lejos de seguir análoga variación, pues sólo alcanza 2.300.000 en los últimos. Como veremos más adelante, la eficacia de la armadura está, por decirlo así, medida por la relación de su coeficiente de elasticidad al del hormigón. Mientras coeficiente y carga límite de elasticidad aumenten á un tiempo, hay ventaja en usar de un metal ferroso más carburado, ventaja que desaparece en cuanto el coeficiente apenas sube, aunque aquella carga crezca muchísimo.



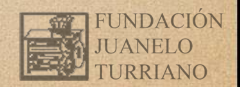
El acero dulce, el más corriente en el comercio y más usado en la construcción, está caracterizado por un límite elástico de 2.500 á 3.000 kilogramos por centímetro cuadrado y un coeficiente de 2.200.000 á 2.250.000, y es el material cuyas cualidades se pueden aprovechar en grado máximo. En el hierro dulce, la limitación procede de la carga límite, de la que sólo una fracción, inferior á $\frac{1}{2}$, es la máxima carga prácticamente admisible; en el acero duro, la relativa pequeñez del coeficiente de elasticidad limita esa fracción, eficazmente aprovechable en el hormigón armado, á $\frac{1}{3}$ ó $\frac{1}{4}$; mientras que en el acero dulce puede ser y es muy poco inferior á $\frac{1}{2}$.

Análoga limitación se establece por la adherencia, igual en todos los hierros y aceros; de nada sirve un material que en obras metálicas pudiera soportar 1.800 á 2.000 kilogramos por centímetro cuadrado, si tales cargas son inadmisibles dentro del hormigón armado, por comprometer la unión entre sus dos elementos.

El material á que nos referiremos siempre será, pues, el acero dulce, definido por las siguientes condiciones:

Carga límite de elasticidad, de 2.500 á 3.000 kilogramos por centímetro cuadrado. Carga de rotura, de 3.700 á 4.500. Alargamiento total en 20 centímetros, de 32 á 25 por 100. Posibilidad de encorvar *en frío* una barra, doblándola 180° sobre otra de diámetro vez y media mayor, sin que se agriete. Imposibilidad de obtener un temple apreciable.

Este material es de fabricación corriente (procedimientos Martín Siemens, ó Bessemer, *básicos*) en España, y las fábricas lo sirven en barras rectas hasta de 18 ó 20 metros de longitud, cortadas al largo que se pida, con tolerancia de



algunos centímetros *en más*, nada en menos, sin aumento de precio sobre el corriente.

Con dicha longitud basta y sobra para la generalidad de las obras. La soldadura de barras debe proscribirse, admitiéndola tan sólo en casos especiales, y á condición de hacerlas con extraordinario esmero, recalcándolas para aumentar su sección en una longitud igual á diez diámetros, y de situar el empalme en los puntos donde la tensión sea bastante inferior á la máxima. El acero admite la soldadura tanto mejor cuanto más dulce es, aunque siempre requiere más habilidad y cuidado que el hierro.

La forma de sección más general y más recomendable es la circular. La condición de ofrecer el mínimo perímetro para un área dada, es desfavorable, á primera vista, por reducir la adherencia total. Compensa con creces esta desventaja, el ser prácticamente mayor la adherencia por unidad de superficie sobre barras cilíndricas que sobre prismáticas, así como el ser más eficaz el apisonado, análogamente á lo que sucede en el hormigón con los elementos redondeados y poliédricos.

Los yanquis usan variados tipos de barras, de secciones cuadradas, circulares, elípticas, etc., deformadas, bien por torsión (fig. 19), bien por relieves (figs. 20 y 21), bien por ambas cosas (fig. 22), con numerosas variantes. En el fondo,

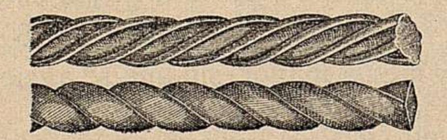


Figura 19.



Figura 20.

más que aumentar de un modo eficaz la adherencia, persiguen los creadores de esos tipos la obtención de patentes.



Como veremos más adelante, la eficacia de tales formas sólo es cierta cuando la distancia de la barra al paramento es bastante grande. De ordinario, el efecto es contraprodu-

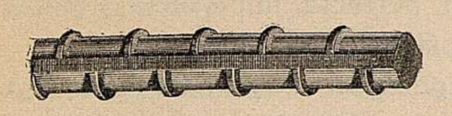


Figura 21.

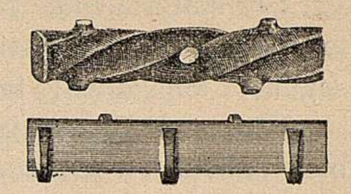


Figura 22.

cente; los relieves, en particular, tienden á disgregar el hormigón.

Con las barras cilíndricas, bien dispuestas en número y forma, se consigue con creces toda la adherencia necesaria sin recurrir á esas formas complicadas y costosas.

Las secciones rectangulares, pletinas y planos anchos, y las angulares, simple y doble te, se emplean también á veces, y con buen resultado, en piezas donde predominan los trabajos de compresión ó de extensión, constituyendo entonces, más bien que el hormigón armado, lo que llamaremos *metal hormigonado*.

La adherencia unitaria sobre superficies planas, sobre todo si son grandes, es bastante menor que sobre formas redondeadas; desventaja que se compensa con el gran desarrollo de superficie lateral y con armaduras secundarias que traben bien el hormigón alrededor de las principales.

III

Elasticidad longitudinal.

Un cuerpo soporta la acción de fuerzas exteriores, merced á la reacción desarrollada al modificarse sus distancias moleculares; no hay resistencia sin deformación.

Si al cesar la acción exterior desaparece la deformación, total ó parcialmente, el cuerpo es perfecta ó imperfectamente elástico; si la deformación subsiste íntegra, plástico.

Los materiales de construcción pasan, en general, por los tres estados de elasticidad, perfecta, imperfecta y nula, según va aumentando la intensidad de la acción exterior.

El período de elasticidad perfecta es bastante extenso y bien definido en los materiales metálicos. Los pétreos se comportan al principio como cuerpos semielásticos, y llegan, al cabo de cierta duración, ó de cierto número de repeticiones de la acción de una fuerza exterior, á hacerse perfectamente elásticos para fuerzas menores ó iguales á aquélla.

Dentro del período perfecto, la deformación en los metales es proporcional á la intensidad de la acción exterior, (ley de Hooke). Tomando por abscisa la intensidad de esa acción ó carga unitaria *H,* y por ordenada la deformación, también unitaria, Δ, la ley está representada por una recta, cuyo coeficiente angular, respecto al eje Δ, es el factor de proporcionalidad, ó coeficiente de elasticidad.

Los materiales pétreos no obedecen á esta ley; las deformaciones crecen más rápidamente que las cargas, en particular cuando éstas son negativas, ó tensiones. La figura 23 representa las leyes elásticas de un mismo hormigón á los tres y á los veinticuatro meses de fraguado.

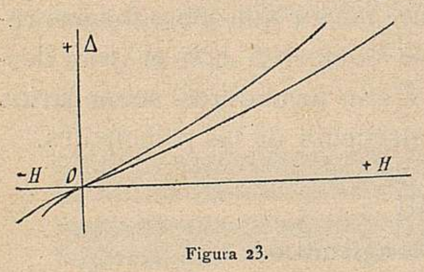


Figura 23.

Mientras que en los metales ferrosos, salvo la fundición, las resistencias á la rotura y cargas límites elásticas son las mismas por compresión que por tracción, en los materiales pétreos se llega mucho antes al estado plástico y



á la rotura en el régimen de tensiones, y las cargas límites elásticas no aparecen bien definidas sino cuando el material ha sido previamente sometido á un trabajo de adaptación molecular, que lo hace perfectamente elástico por bajo de un cierto límite.

El coeficiente de elasticidad de estos materiales resulta variable, función de la carga. Su definición precisa es la misma dada por la ley de Hooke, pero aplicada á una sucesión de incrementos de las cargas y de las deformaciones, ligados por factores de proporcionalidad variable de un modo continuo; es decir, $E = \frac{dH}{d\Delta}$, ó sea el coeficiente angular sobre el eje Δ de la tangente á la curva $\Delta = f(H)$. La ley de Hooke no es sino un caso particular de esta ley más general, cuando $f(H) = EH$ y $E = \frac{\Delta}{H}$, es constante.

Bach ha determinado experimentalmente $f(H)$ en la forma kH^{ν}. Lang y Ritter en la mucho más cómoda para el cálculo

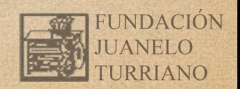
$$H = H_{rc}\left(1 - e^{-1000\Delta}\right)$$

en la que H_{rc} designa la carga de rotura por compresión en cubos, e la base neperiana. Resulta:

$$E = \frac{dH}{d\Delta} = 1000\, H_{rc}\, e^{-1000\Delta} = 1000\,(H_{rc} - H);$$

ambas expresiones dan, con toda la exactitud deseable para la práctica, las leyes de variación de Δ y E en función de las cargas H; cuando éstas son negativas, precisa sustituir H_{rc} por H_{rt}.

La constante H_{rc}, lo mismo que la H_{rt}, carga de rotura por tracción, que interesa también conocer, tienen valores sumamente variables de un hormigón á otro, y aun en uno mismo, según el tiempo de fraguado.



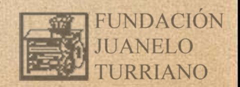
Evitaremos ahora y siempre citar listas de valores numéricos, que sólo inducen á confusión, y señalaremos únicamente los promedios ó los mínimos, es decir, los valores que puedan tener aplicación práctica.

La influencia de la edad del hormigón es la mejor definida. Puede admitirse que H_{rc} y H_{rt} adquieren sus valores máximos á los dos años, aunque en realidad continúen después ganando algo. Tomando por unidades los valores de ambas H á los tres meses de fraguado, los relativos al mes y á los dos años son, en general, $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{3}$ de aquéllos. Los valores de E crecen también, pero más despacio.

La influencia de la riqueza en cemento, composición granulométrica de los áridos, cantidad de agua, apisonado, etc., ya quedan definidas en general. Sólo interesa conocer los valores mínimos, relativos á los hormigones prácticamente empleados.

La Comisión francesa, á la que seguiremos, adopta como valores de H_{rc}, carga de rotura por compresión, medida en cubos de 50 centímetros cuadrados de sección, para los hormigones de 300, 350 y 400 kilogramos por metro cúbico, á los tres meses de fraguado, 160, 180 y 200 kilogramos por centímetro cuadrado. Son, en verdad, mínimos muy prudentes, que se pueden adoptar con toda confianza, como medidas de la resistencia *en obra*, no en laboratorio. Los verdaderos valores de H_{rc} alcanzan frecuentemente, con regulares arenas y con las precauciones de fabricación usuales en las obras, vez y media, ó más, aquellos mínimos.

Los valores de H_{rt} son más difíciles de apreciar. Sabido es que se observan divergencias grandísimas en *ochos* idénticos; y mayores aún, comparando los valores relativos á *ochos* de distintas secciones. La forma usual con sección



central estrangulada, lejos de dar en ésta una repartición uniforme de la tracción total, acumula cerca de los bordes la mayor parte de la misma. El verdadero valor de H_{rt}, según Féret y Foepl, es próximamente el doble del directamente deducido.

Prevalece hoy la idea de sustituir esos ensayos de tracción por los de flexión, desde que los trabajos de Féret han demostrado que existe una proporcionalidad, prácticamente exacta, entre los resultados obtenidos por ambos medios, con la ventaja á favor del último, de eliminar muchas de las causas accidentales de error y de hacer comparables los ensayos de prismas fabricados al objeto, con los de otros labrados en trozos cortados en una obra.

Las cargas, deducidas por la fórmula usual $H'_{rt}=M\times\frac{6}{a\,p^2}$, en prismas de ancho a, y altura ó *peralto* p, son erróneas, por aplicar la hipótesis de Navier, conservación de las secciones planas, á material que no cumple la ley de Hooke; pero el error es el mismo, prácticamente, para todos los prismas, ap, como lo demuestra la constancia del número $\frac{H'_{rt}}{H_{rt}} = 1{,}95$ obtenido por Féret en gran número de muestras de dosificaciones diversas.

Con el mismo criterio de prudencia que para H_{rc}, admitiremos H_{rt} = de 0,06 á 0,08 H_{rc}, ó sea, para los tres tipos de hormigón, 10, 12,5 y 15 kilogramos por centímetro cuadrado, mínimos prácticos, cuyo verdadero valor se aproxima mucho en general á 0,10 H_{rc}.

El coeficiente de elasticidad del hormigón, E_h, tiene un valor máximo, inicial, relativo á cargas muy pequeñas, y que se puede considerar independiente del signo de éstas. Bajo compresiones crecientes, disminuye de un modo gradual, puede decirse uniforme, reduciéndose á 0,72 del inicial, bajo



una carga igual á 0,28 H_{rc}. Bajo tensiones la disminución, aunque también gradual, puede considerarse como uniformemente acelerada, y se reduce á 0,25 del inicial para una carga igual á $\frac{3}{4}$ H_{rt}, ó próximamente, 0,05 H_{rc}. En suma, su disminución total por tensión, es unas treinta veces mayor que por compresión.

Las variaciones del valor inicial de E_h para un mismo hormigón, el de 300 kilogramos, exclusivamente producidas por las distintas proporciones de agua y diversos grados de apisonado, son del simple á más del doble. La Comisión francesa ha encontrado valores desde 160.000 hasta 400.000 kilogramos por centímetro cuadrado, y en atención á que no es el inicial, sino el correspondiente á las máximas cargas prácticamente admisibles, el que interesa, ha adoptado, como la Comisión prusiana, un valor de 150.000 kilogramos por centímetro cuadrado.

Ya veremos la importancia capital que tiene este coeficiente, ó más bien que él mismo, su relación con el homólogo de las armaduras E_a. Admitiremos, en general, $\frac{E_a}{E_h} = r = 15$, con ciertas prudentes restricciones en algunos casos.

La disminución de E_h bajo tensión, corresponde á la producción de alargamientos unitarios, Δ, que crecen con rapidez. Cuando Δ alcanza valores de 0,000 10 á 0,000 15 en una pieza de hormigón solo, sobreviene la rotura. Y si esa misma pieza es de hormigón armado, se logra, á veces sin producir grieta alguna, que sufra alargamiento hasta de 0,000 135, mucho mayores. En ambos casos se trata de alargamientos producidos *por flexión*.

Este fenómeno ha sido vivamente discutido desde un principio y estudiado por numerosos experimentadores; su explicación más racional es la siguiente:



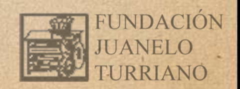
Desde luego es un hecho innegable que la ductilidad, ó facultad de alargarse sin romperse, es mayor en el trabajo por flexión que por tracción directa, debido quizá á las variaciones de tensión unitaria, sensibles en aquélla y nulas en ésta.

En cuanto la carga se acerca bastante á la de rotura, el decrecimiento de E_h es rapidísimo y el hormigón entra en el período *plástico,* en el que E_h es prácticamente nulo y las deformaciones pueden crecer sin que las reacciones moleculares aumenten.

Si se somete á tracción una barra de hierro de mediana calidad, en cuanto el límite elástico (1.800 kilogramos por centímetro cuadrado, por ejemplo) es superado, los alargamientos se hacen permanentes y pueden alcanzar un 4 por 100 de la longitud inicial al acercarse la carga á la de rotura (3.200 kilogramos por centímetro cuadrado) y empezar á manifestarse la estricción. A partir de este momento, la deformación prosigue rápidamente, pero no afecta á toda la longitud de la pieza, sino sólo á una pequeña zona, la de estricción. Referido á la longitud de esta zona el alargamiento unitario, puede llegar á 100 por 100, veinticinco veces el primitivo.

Si otra barra idéntica se recubre con un tubo de acero dulce, zunchado en caliente, y se repite el experimento, todo cambia. Mientras el tubo de acero no trabaje á más de su límite elástico (3.200 kilogramos por centímetro cuadrado), la barra de hierro, forzada á acompañarlo, no experimentará deformación permanente, sino elástica, y, sin embargo, su valor unitario será el mismo que al acero corresponde. El límite elástico del conjunto es el del material que lo tiene mayor.

Excedido ese límite, el sólido heterogéneo se deformará de un modo permanente, hasta que la carga se aproxime á



la de rotura del tubo de acero y se inicie en él la estricción. El alargamiento será hasta entonces 12 por 100, por ejemplo, y el hierro lo habrá sufrido tres veces mayor que cuando está solo.

Así, en un conjunto heterogéneo, el límite aparente de elasticidad y el máximo alargamiento elástico son los relativos al cuerpo más resistente; el esfuerzo total correspondiente es la suma de los esfuerzos límites elásticos parciales en cada cuerpo, aunque en cada uno, aislado, correspondan deformaciones elásticas distintas. Y, de un modo análogo, el esfuerzo total de rotura es la suma de los parciales, por más que en cada cuerpo aislado correspondan deformaciones *plásticas* distintas, y el alargamiento de rotura es el del cuerpo más dúctil.

Esta acción es la que se utiliza para fabricar finísimos alambres de platino, de menos de un micrón de diámetro. Recubierto aquel metal de plata, la ductilidad del conjunto es la de ésta, y se alarga plásticamente en la hilera como si fuese de plata pura. El alambre mixto así obtenido deja, al disolver en ácido nítrico la envolvente, el núcleo de platino, casi invisible.

Análogamente, el hormigón soporta, gracias á su adherencia con la armadura, alargamientos, que de estar solo hubieran producido la estricción primero y la rotura después. La deformación *plástica,* que sólo en la zona de estricción podría tolerar sin romperse, la soporta en todos los elementos de su longitud; y, sin embargo, la carga no supera á la que en tal zona puede sufrir, y, por tanto, no se rompe. Al tratar de la flexión, veremos cómo la suma de tensiones desarrolladas por las fibras de hormigón se mantiene, á partir de cierto valor, constante bajo momentos, y, por tanto, alargamientos, progresivamente mayores.



La permanencia ó la reiteración de una carga produce un trabajo de adaptación molecular, con variaciones de E_h, hasta que la materia se *acostumbra,* pudiera decirse, y llega á hacerse perfectamente elástica, con un E_h definitivo y constante, *menor* que el primitivo; la ley de Hooke es la que entonces regula las deformaciones bajo cargas iguales ó menores que la ya reiterada.

Así, representando como siempre, (fig. 24), las deforma-

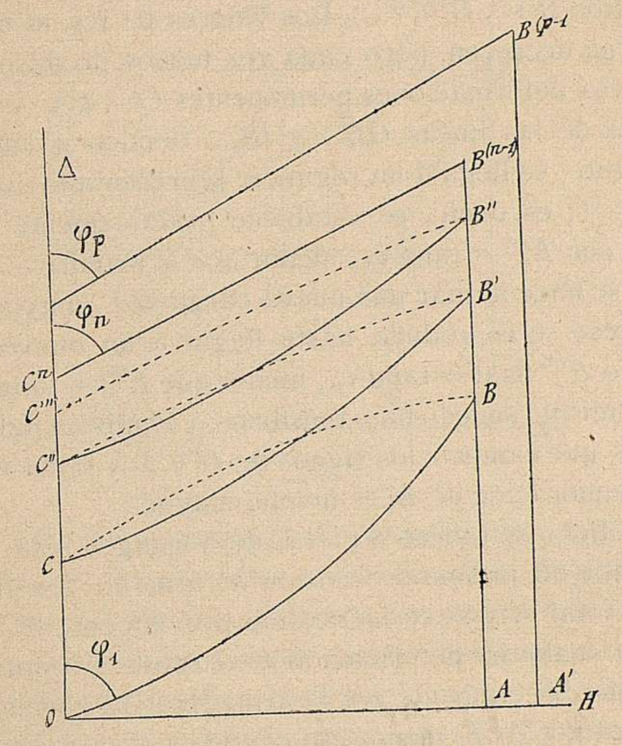
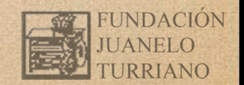


Figura 24.

ciones y cargas, á una, *OA,* corresponde un acortamiento final, *AB*. Al suprimirla, no recobra la pieza su primitiva longitud, sino que subsiste una deformación permanente, *OC*. Mientras la carga crece de cero á *OA,* E_h disminuye paula-



tinamente; la curva OB vuelve su concavidad hacia arriba. Cuando la carga decrece de OA hasta cero, la curva correspondiente, BC, tiene su concavidad hacia abajo, y E_h va decreciendo hasta un valor final, en C, menor que el primitivo. Al reiterar la carga OA, se producen nuevos alargamientos, AB', AB''..., y nuevas deformaciones permanentes, CC', $C'C''$..., con análogas variaciones de E_h durante la carga, (líneas continuas, CB' CB''...) y durante la descarga, (líneas de puntos $B'C'$, $B''C''$...). Los valores de E_h, al fin de cada descarga decrecen, pero cada vez menos, lo mismo que las sucesivas deformaciones permanentes CC', $C'C''$... Las curvaturas de las líneas OB... y BC... tienden á anularse, y, finalmente, se llega á un régimen, representado por la *recta* $C^{(n)} B^{(n-1)}$; es decir, se establece prácticamente la ley de Hooke con $E_h^{(n)} = \text{tang}\ \varphi_n$, menor que el primitivo.

Si se hace actuar una nueva carga OA', mayor que OA, el proceso se reproduce hasta llegar á un nuevo régimen con otro $E_h^{(p)}$ final $= \text{tang}\ \varphi_p$, menor que $E_h^{(n)} = \text{tang}\ \varphi_n$.

Lo mismo sucede bajo tensiones, y la misma figura sirve, sin más que cambiar los signos de H y Δ, y tener en cuenta que la minoración de E_h es mucho mayor.

Lo dicho se refiere á piezas de hormigón solo. Si se experimenta un prisma de sección h, armado con barras de sección total α, y si se ha medido previamente E_α, se conoce, para cualquier deformación Δ, el esfuerzo total $E_\alpha \Delta \times \alpha$ soportado directamente por la armadura. El hormigón solamente sufre C (ó T) menos esa cantidad, y su carga unitaria *aparente*, $\frac{C}{h}$ ó $\frac{T}{h}$, ó sea H ó T kilogramos por centímetro cuadrado, se aminora en $\frac{E_\alpha \Delta \alpha}{h} = H_\alpha$, ó T_α (figura 25).

La recta $O\alpha$ representa esta última expresión. Así, para una carga unitaria *aparente*, OA, que produce en el prisma



armado la deformación AB, la carga *real* del hormigón es solamente dB, y la parte $O'd$ es el alivio ó minoración producidos por la armadura.

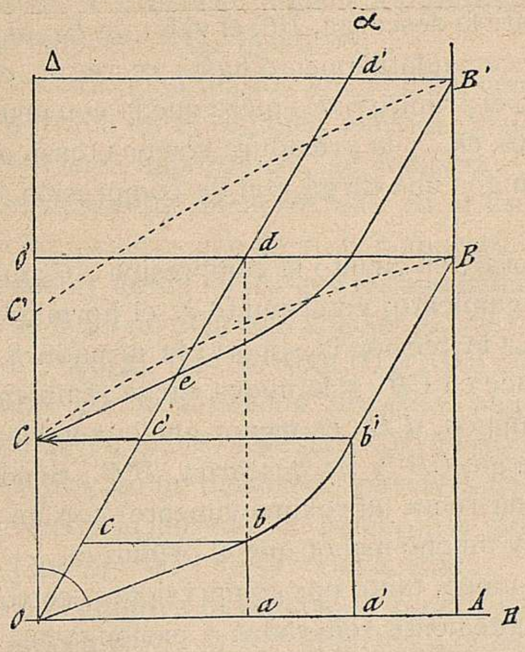
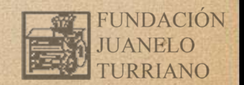


Figura 25.

Operando por tracción se observa que hasta una tensión pequeña Oa, el alargamiento crece casi linealmente según Ob; hasta otra cierta Oa', aumenta con mucha más rapidez, según una curva bb'; y á partir de Oa' los incrementos vuelven á ser prácticamente uniformes y la rama $b'B$ viene á ser una paralela á la recta $O\alpha$. Es decir, que E_h disminuye poco en el primer período $O\alpha$, rápidamente en el segundo, y permanece prácticamente constante en el tercero, con un valor mucho más pequeño que el primitivo. Y, al mismo tiempo, la carga *real*, que en el primer período crece linealmente de O á cb, aumenta más despacio en el segundo, hasta $c'b'$,



y después sigue prácticamente con el *mismo* valor hasta dB, mientras los alargamientos crecen de $a'b'$ hasta AB. Es decir, que el hormigón sigue *plásticamente* las deformaciones de la armadura sin que su tensión varíe.

Durante la descarga, BC, el valor de E_h, al principio mayor, decrece paulatinamente hasta recobrar, en C, un valor menor que el primitivo. La pieza queda con una deformación permanente, OC, y la armadura con una tensión que produce en el hormigón una carga real de compresión representada por $c'C$.

Al reiterar, en cuanto la compresión $c'C$ aminora, principia el alargamiento; en el punto e, el hormigón no trabaja nada y toda la tensión la soporta la armadura; la línea OB se reproduce en CB', y la nueva carga realmente soportada por el hormigón, $d'B'$, es menor que la anterior, dB. Las líneas de carga, CB' y de descarga, $B'C'$, tienden á confundirse en una recta (aproximadamente) con un E_h final casi constante y mucho menor que el primitivo.

En resumen, tanto por compresiones, como por tracciones, suficientemente reiteradas ó prolongadas, (el efecto es análogo), el hormigón armado va modificando su agregación molecular hasta alcanzar un régimen de elasticidad perfecta para cargas inferiores ó iguales á las ya sufridas, pero con un E_h inferior al inicial.

La ductilidad aumenta considerablemente gracias á la armadura; los alargamientos pueden ser relativamente grandes, sin que el hormigón sufra aumentos de tensión, sino deformándose de un modo plástico bajo una carga prácticamente constante.

Como veremos con detalle, la manera de efectuarse el fraguado origina estados iniciales de compresión ó de tensión en el conglomerado. Su representación sería la misma



de la figura 25, con el eje *OH* por encima de su posición en el primer caso, y por debajo en el segundo.

Si hay compresión inicial, el primer efecto de la tensión exterior es llegar á equilibrar aquélla; los alargamientos tardarán más en empezar á ser plásticos.

Por lo contrario, una tensión inicial en el conglomerado acelerará la entrada en el régimen plástico; y si las cargas *OA* adquieren cierta importancia, se romperá el hormigón bajo tensiones aparentes menores que en el estado inicial neutro y mucho menores que en el de compresión.

Importa sentar desde ahora que los alargamientos á que en las obras se llega no alcanzan á 0,000.30, y en la mayoría de los casos á 0,000.20. Los de 0,001.00 á 0,001.35, en piezas experimentadas por la Comisión francesa, han producido una reducción de H_{rc} á 0,80 y de E_h á 0,50 de sus valores primitivos. La repetición de tensiones aparentes de 18 kilogramos por centímetro cuadrado, en número de muchos millares ha reducido H_{rt} á 0,70 de su valor inicial.

Dentro de los límites prácticos, la repetición de esfuerzos en nada altera ni H_{rt}, ni H_{rc}, ni el E_h, que en el régimen elástico queda como definitivo. Posteriormente á la Comisión francesa, una experimentación hecha en la Universidad de Pensilvania, sobre piezas sometidas á trabajos *superiores* á los prácticamente admisibles *(high working stresses)*, reiterados desde 200.000 á 1.140.000 veces, lo ha establecido de un modo indiscutible.

IV

Elasticidad transversal.

Un cuerpo prismático, sometido exclusivamente á esfuerzos según una de sus direcciones principales, se deforma no sólo en sentido paralelo á ésta, sino también en el de las



otras dos. A una deformación longitudinal, Δ, corresponde en cada dirección otra, K, de nombre contrario (para dilatación, contracción, y viceversa), ligadas ambas por la ley $\Delta = m\,K$. El coeficiente de elasticidad transversal, relativo á la ley $K = \frac{1}{m}\,\Delta = \varphi\,(H)$, es, genéricamente, $E_t = \frac{d\,H}{dK}$ é igual á $\frac{m}{2(m+1)}\,E$.

El número m, coeficiente de contracción, es constante en los materiales que obedecen á la ley de Hooke, y variable en los pétreos. En los metales ferrosos, m se acerca bastante á 4, y de ahí que la resistencia transversal, al desgarramiento ó al deslizamiento, A_{rd}, sea inferior á la relativa á tracción ó compresión, é igual á $\frac{A_{rt}}{1 + \frac{1}{m}} = \frac{4}{5}\,A_{rt}$, y el coeficiente de elasticidad transversal, $E_t = \frac{4}{10}\,E$.

En los hormigones, la elasticidad y resistencia transversales se conocen mucho peor que las longitudinales, por la variabilidad de las influencias y la escasez de experimentos.

En dos formas pueden presentarse las acciones transversales: limitadas exclusivamente á un plano, dentro del cual las fuerzas exteriores tienden á hacer resbalar, por traslación ó por giro, las dos partes del cuerpo, una con relación á otra; ó extendidas esas acciones á todos los planos sucesivos, variando de uno á otro continua ó discontinuamente.

La primera forma, muy rara en la construcción, corresponde al corte con tijera mecánica; no hay flexión alguna ni más trabajo molecular que el desarrollado en el plano, único, de las fuerzas exteriores.

La segunda forma es la que se presenta siempre en la práctica al coexistir el desgarramiento con la flexión, por estar sometido el cuerpo á fuerzas situadas en distintos pla-



nos. Si la resultante de las fuerzas pasa por el centro de gravedad, la sección tiende á ser desgarrada por traslación; si aquéllas se reducen á un par, por torsión, y si tienen una resultante excéntrica, por traslación y torsión á la vez.

El equilibrio de un paralelepípedo elemental exige que en cada punto donde exista una carga unitaria de desgarramiento, D_v, según el plano de la sección, exista forzosamente otra carga unitaria de deslizamiento, D_h, dirigida normalmente al mismo plano y siempre igual á aquélla en valor absoluto.

El equilibrio molecular resulta de la acción combinada de las cargas unitarias tangenciales, D_v y D_h (en general, D, puesto que son iguales), y de las cargas normales de compresión ó tracción, N_h, directamente producidas por el momento flector. La acción resultante es máxima en dos direcciones ortogonales, las de los *esfuerzos principales*, de valores unitarios $\frac{N_h}{2} \pm \sqrt{\frac{N_h^2}{4} + D^2}$.

Hay para cada punto una orientación con la vertical, $\operatorname{tang} \varphi = -\frac{2D}{N_h}$, según la cual sufre una carga única, resultante de todas, $\left(\frac{N_h}{2}\right) - \sqrt{\frac{N_h^2}{4} + D^2}$, y del mismo signo que N_h, es decir, una tracción, bastante mayor que D, cuando N_h es negativa ó de tensión. Si la resistencia del cuerpo á la tracción, H_{rt}, es igual ó menor que al desgarramiento, H_{rd}, la rotura no sobrevendrá bajo la acción de la carga D, sino bajo la de la tensión máxima $\left(-\frac{N_h}{2}\right) - \sqrt{\frac{N_h^2}{4} + D^2}$, mayor que D.

Esto es precisamente lo que ocurre en los materiales pétreos: $H_{rd} > H_{rt}$. Teóricamente, suponiendo que el desga-



rramiento se efectúa según una serie de dientes de sierra elementales, limitados por caras comprimidas y estiradas, al apurarse simultáneamente en ambas las resistencias moleculares H_{rc} y H_{rt}, resulta definida la carga de rotura por desgarramiento, como la media geométrica de aquéllas: $H_{rd} = \sqrt{H_{rc} \times H_{rt}}$.

Muchos experimentos parecen confirmar esto: siempre resulta difícil hacer que la rotura se verifique exclusivamente por desgarramiento; al intervenir algo de flexión, la rotura se precipita, al presentarse los esfuerzos principales de tracción.

La influencia de las armaduras parece ser prácticamente nula bajo las cargas ordinarias en las obras. No entra en juego sino cuando la resistencia propia del hormigón está á punto de apurarse. Si la rotura se produce, como se ha hecho en todos los experimentos, las barras llegan á su vez á oponerse con toda su resistencia al desgarramiento, antes de que uno de los trozos deslice de un modo apreciable respecto al otro, á lo que ayuda el elevado rozamiento del hormigón sobre sí mismo, de 0,60 á 0,75. Las armaduras son, en tales casos, una salvaguardia que impide la ruina, pero no se debe contar con ellas para evitar la fisuración del conglomerado.

Los resultados de todos los experimentos hechos por desgarramiento, deslizamiento y torsión, pueden resumirse en concreto como sigue:

La carga de rotura por acciones transversales, H_{rd}, siempre es bastante mayor que la por tensión, H_{rt}, y, como mínimo, 0,10 H_{rc}. Es decir, para hormigones de 300, 350 y 400 kilogramos por metro cúbico, en lugar de los guarismos teóricos $\sqrt{H_{rc} \times H_{rt}}$, (40, 47,5 y 54,8), 16, 18 y 20 kilogramos por centímetro cuadrado. El criterio de prudencia se extre-



ma, ante la incertidumbre que en la materia reina y la variabilidad grandísima observada en la experimentación.

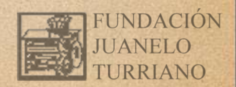
V

Adherencia.

Por la acción del apisonado refluye contra las paredes del molde y las barras de la armadura la parte más jugosa del hormigón, formando alrededor de cada elemento de la armadura una vaina de mortero rico, cuya resistencia al desgarramiento es lógicamente mayor que en el resto de la masa.

En la superficie de esa vaina, en contacto inmediato con el metal, se forman, durante el fraguado y en delgadísimo espesor, sales complejas de calcio y de hierro, á las que se debe principalmente la soldadura. La contracción que el fraguado fuera del agua y la desecación producen, contribuyen á hacer más enérgica la adherencia.

La primera condición para que haya buena soldadura es que la cantidad de agua, juntamente con la fuerza del apisonado, lleguen á producir esa cáscara, intermedia entre las barras y el hormigón propiamente dicho. La consistencia *seca* exige un apisonado sumamente enérgico, y, aun así, cuando la armadura es algo complicada no hay seguridad de la buena adherencia, á menos de recubrir directamente las barras con un mortero rico, 1 : 1,5. Es preferible la consistencia *plástica* y aun la *jugosa*. El exceso de agua correspondiente á esta última y á la *fluida*, parece aminorar la adherencia en los ensayos de laboratorio más que en las obras, donde los encofrados facilitan la pronta eliminación de aquél.



Las proporciones de arena y grava influyen poco, dentro de las dosificaciones corrientes. Preferible es que haya parte de granos finos, que más fácilmente forman la cáscara rica, aunque se pierda algo en compacidad. Si la arena es toda de granos gruesos, precisa disminuir la cantidad de agua y forzar el apisonado.

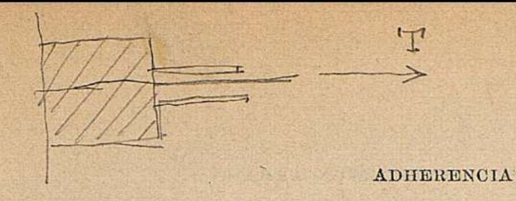
La forma y las dimensiones de las barras influyen bastante. Las superficies planas y las de pequeña extensión se adhieren bastante menos que las redondeadas y de dimensiones mayores. Así, tomando por unidad la adherencia sobre flejes ó pletinas de 2 á 2,5 centímetros de ancho, la de cuadradillos de 0,5 á 1 centímetro es 1,25, la de redondos análogos, 1,50, y la de redondos de 1,5 centímetros en adelante, 1,75.

La edad del hormigón influye, como es lógico: á los veintiocho días, la adherencia es, como promedio, 0,80 de la correspondiente á tres meses. Indudablemente sigue creciendo con el tiempo, aunque sea de un modo muy lento, como las demás constantes del hormigón.

Ninguna experimentación ha producido resultados tan discordantes como las hechas para medir la adherencia. Anegada en hormigón una barra, se actúa sobre ésta hasta conseguir su deslizamiento; el esfuerzo dividido por la superficie lateral de la barra, da el valor unitario, H_a. Si la fuerza crece rápidamente, ó si es una compresión, ó si la barra es corta, se obtienen siempre valores mayores que si la fuerza aumenta poco á poco, ó si es una tensión, ó si la barra es larga. Todo se explica, sin embargo.

Una tracción ejercida sobre la barra se va transmitiendo lateralmente, mientras no se rompe la adherencia, al hormigón. En el plano frontal, la barra soporta el esfuerzo total T y el hormigón la reacción del apoyo $-T$, que lo comprime. En el plano final, la tensión de la barra es nula, y nula tam-





bién la compresión del hormigón. En un plano intermedio, la barra sufre una tracción $t < T$; la diferencia $T - t$ se ha transmitido al hormigón y éste queda comprimido por $-T + (T - t) = -t$.

La barra tiende á alargarse en cada punto con arreglo á su carga unitaria, decreciente desde $\frac{T}{\alpha}$ hasta O; el hormigón á acortarse conforme á la suya, variable entre $-\frac{T}{h}$ y O.

Salvo en el plano final, hay, por tanto, una tendencia al deslizamiento, que es la suma de acortamiento y alargamiento en cada plano y máxima en el inicial. La adherencia se rompe en una cierta longitud; la barra desliza, pero desarrollando un rozamiento, que transmite al hormigón parte, t', de la tensión T. El valor de ésta en cada momento no es el correspondiente á la adherencia en toda la barra, l, sino al de una parte l_1, más el rozamiento en el resto, $l - l_1$.

A medida que crece T, aumenta la zona $l - l_1$, y al llegar ésta á l, el esfuerzo medido al deslizar toda la barra no es sino el correspondiente al rozamiento en toda su longitud.

Si se opera por presión, ésta decrece en la barra del plano inicial al final; en el hormigón, crece, por lo contrario, de aquél á éste. En un plano intermedio la presión sobre la barra es $p < P$, y la compresión del hormigón, $P - p$. Los dos tienden á acortarse, y su deslizamiento es la diferencia de acortamientos, nula en un cierto plano intermedio, para el que las deformaciones $\frac{p}{\alpha E_\alpha}$ y $\frac{P - p}{h E_h}$ son iguales, y creciente desde ese plano á los inicial y final.

Habrá, por tanto, deslizamiento al principio y fin de la barra, pero mucho menor que al operar por tensión, y la adherencia se mantendrá íntegra en una cierta zona, observándose una disminución del esfuerzo P al deslizar francamente la barra. P será, además, mayor que T.



Cuanto más corta sea la barra, menores serán los esfuerzos totales *P* ó *T*; sus decrementos $P - p$ y $T - t$ y los deslizamientos; la transmisión lateral se hará con más uniformidad y las fuerzas finales, necesarias para romper del todo la adherencia, serán también mayores.

Si los esfuerzos *T* ó *P* crecen bruscamente, los deslizamientos no tienen tiempo para producirse: aquéllos se transmiten con mayor uniformidad, y la adherencia evaluada resulta mayor.

La verdadera medida de la adherencia debiera, pues, obtenerse, operando por compresión, rápidamente, sobre una barra anegada en muy poca longitud. Por lo contrario, evaluada la adherencia por tensión, lentamente y sobre gran longitud hormigonada, tiene que resultar menor. La transmisión lateral de esfuerzos se concentra, por decirlo así, en los primeros planos, hasta que, vencida en esa zona la adherencia, desliza la barra, y la transmisión se efectúa en otra zona hasta agotar en ella la resistencia, deslizar de nuevo, y así sucesivamente.

Se explica, por tanto, que muchos admitan hasta 45 kilogramos por centímetro cuadrado, mientras que la Comisión francesa ha deducido valores hasta de 8.

Todo lo dicho se refiere á barras cilíndricas y perfectamente rectas: las muy delgadas, que siempre ofrecen ondulaciones, dan mayor adherencia. Las barras americanas la dan también, siempre que el espesor de hormigón alrededor de ellas sea considerable; el arranque de la armadura se produce por desgarramiento según la superficie lateral envolvente de las indentaciones, y la barra arrastra consigo el hormigón que rellena los huecos. Con escasos recubrimientos, de 1,5 á 2 centímetros, los salientes quebrantan el hormigón, cuyos ángulos entrantes son, como en la fundi-



ción, puntos peligrosos por donde con facilidad se hiende.

En la práctica, la adherencia interviene de un modo muy distinto del de la experimentación. Las tensiones varían de un punto á otro de las barras, y sus decrementos, nunca bruscos, son los que la adherencia tiene que equilibrar. Por otra parte, las barras van recubiertas de cuando en cuando, y en parte de su periferia, por las armaduras secundarias.

La comparación experimental de barras sin armadura secundaria *(a)*, y con ésta, en forma de estribos, ceñidos á aquéllas *(b)*, ó algo separados *(c)*, (fig.ª 26), ha demostrado

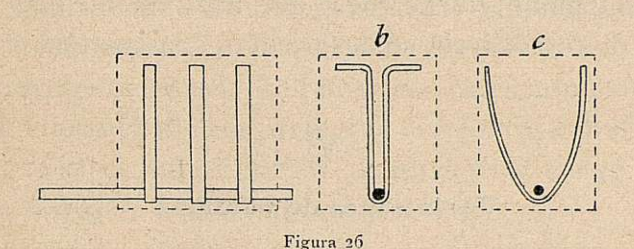


Figura 26

la superioridad del tipo *(c)* sobre el *(b)* y de éste sobre el *(a)*, y la ventaja de sustituir á los flejes ó pletinas comúnmente usados, barras redondas, todo lo cual se explica lógicamente. Un estribo ceñido á la barra disminuye, sobre todo si es de pletina, la superficie de adherencia entre aquélla y el conglomerado. El estribo algo despegado de la barra hace el efecto de un zuncho sobre el hormigón, que la envuelve y mejora su adherencia.

El límite que, en resumen, y con el criterio de prudencia impuesto, podemos asignar á H_{α}, es el mismo aceptado para $H_{r\alpha}$, es decir, 16, 18 y 20 kilogramos por centímetro cuadrado para los tres hormigones tipos. Lo que, como siempre, no quiere decir que en la práctica dejen de ser excedidos, y con mucho, esos mínimos. La Comisión francesa ha obteni-



do hasta 92 kilogramos por centímetro cuadrado en traviesas de hormigón armado después de varios años de servicio; parte de ese valor debido, sin duda, á no ser bien rectas las barras, parte á la edad del hormigón.

El hecho importantísimo de que la adherencia no aminora con las trepidaciones, por fuertes y continuadas que sean, merece ser repetido. La prueba más terminante, además de las citadas, la dan las numerosas instalaciones de molinería en fábricas de harinas y de cementos, que datan de más de quince años, y se conservan en perfecto estado, á pesar de las violentísimas vibraciones, que allí, mucho más que en puentes de ferrocarril, se desarrollan constantemente.

VI

Variaciones de volumen.

Tres causas producen alteración de volumen en el hormigón: el proceso del fraguado y los cambios de estado higrométrico y térmico.

En general, todos los compuestos hidratados tienen un volumen real menor que la suma de los componentes. Los aglomerantes, yeso, cales hidráulicas y cementos, presentan una disminución de 40 á 50 centímetros cúbicos por kilogramo.

Pero la suma de volúmenes del aglomerante, del árido, del agua y del aire interpuesto no obedece á tal ley. Las variaciones de volumen oscilan entre límites muy lejanos, según las diversas proporciones, pero siempre son considerables al principio y sucesivamente decrecientes con el tiempo.

En el mortero 1 : 3 en peso, fraguado al aire, las retracciones unitarias, al cabo de 1, 4 semanas, 3, 6 meses, 1, 2



años, son, como *promedio*, 25, 35, 60, 100, 132, 150 cienmilésimas.

Estos guarismos, promedios entre mínimos y máximos bastante lejanos, son, aun así, inferiores á los que corresponderían por la regla de Lechatelier (40 á 50 centímetros cúbicos por kilogramo). Son siempre relativamente menores en los morteros más áridos y en los hormigones.

Cuando el fraguado se opera dentro del agua, el fenómeno se invierte: las dilataciones resultan siempre menores que las retracciones operadas al cabo de un mismo plazo.

Los cambios de estado higrométrico influyen en los morteros y hormigones como en la mayoría de los cuerpos porosos, ladrillos, piedras, etc.; algo menos en aquéllos que en éstos; se contraen al desecarse y se hinchan al humedecerse.

Una absorción de 1 por 100 de agua produce un entumecimiento lineal de 5 cienmilésimas en el mortero 1 : 3 (peso), que, *sumergido en agua,* al cabo de 1, 4 semanas, 3, 6, 12 meses, llega á dilatarse 15, 21, 24, 28; 33 unidades análogas.

Las variaciones de temperatura producen alteraciones sensiblemente iguales, también, á las originadas en la mayor parte de los materiales pétreos (considerados hasta hace poco como insensibles á aquéllas), y, además, muy poco diferentes de las relativas á los metales ferrosos.

Los promedios de numerosísimas experimentaciones alemanas y yanquis, hechas entre límites bastante extensos, de -15° á $+70^\circ$, concuerdan y dan una dilatación media de 0,000 010 por 1° para los hormigones usuales; las diferencias, en más ó en menos, no pasan de 0,000 000 5.

Para los hierros y aceros se admite, generalmente, 0,000 012; en realidad, al acero dulce empleado en armaduras le corresponde, como promedio, 0,000 011 5.

Todos estos guarismos se refieren á morteros ú hormi-





gones *libres,* sin armadura, que, insensible en los dos primeros casos, y sensible, pero con retraso, en el tercero, se oponga, con mayor ó menor energía, á la alteración de dimensiones.

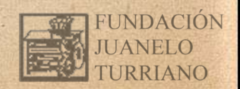
Desde luego, mientras no deslicen las armaduras, el fraguado al aire y la desecación de una pieza armada pondrán en tensión el hormigón, y el fraguado en el agua y la absorción de ésta producirán, por lo contrario, una compresión, impidiendo las barras, en uno y otro caso, y en mayor ó menor grado según la cuantía, que la variación de longitud alcance á lo que correspondería en el hormigón solo.

La retracción del hormigón armado depende no sólo de su retracción específica y de la sección de la armadura, sino del perímetro de ésta y de la longitud total de la pieza.

Un ejemplo concreto lo aclarará. La Comisión francesa experimentó varias piezas de 4 metros de longitud y 40×20 centímetros de sección, armadas con 4 barras de 2,22 centímetros de diámetro, y fué midiendo hasta tres meses después de la fabricación, la longitud de las barras. El acortamiento absoluto alcanzó á 1,056 milímetros que, referido á la longitud total, da por unidad, 0,000 264, guarismo que representa un promedio. Es evidente que el acortamiento unitario, nulo en los extremos, debe crecer progresivamente hasta el centro, donde probablemente alcanzaría, directamente medido, de 0,000 35 á 0,000 40, á los tres meses, y más si se hubiera proseguido la experimentación.

Este acortamiento en armaduras de $E_i = 2.250.000$, revela una presión de 788 á 900 kilogramos por centímetro cuadrado en la región central.

Aun tomando el promedio, esa presión llega á 634 kilogramos por centímetro cuadrado, y la tensión sufrida por el hormigón á



$$\frac{634 \times 4 \times 3{,}87}{40 \times 20} = \frac{9.814}{800} = 12{,}27 \text{ kg./cm}^2.$$

por donde se ve la enorme importancia que la retracción puede alcanzar.

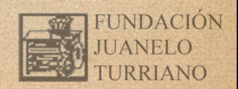
En piezas de 2 metros por 10 × 10 centímetros de sección, los acortamientos unitarios fueron menores. Se comprende que á medida que la longitud crece, para un mismo acortamiento medio, vaya aumentando el de la región central, ó que, á la inversa, para un mismo acortamiento unitario máximo (el compatible con la H_{rt}) en la parte central, el promedio sea menor en piezas más cortas.

Si la retracción se opera rápidamente (pronto desmolde en aire muy seco), el hormigón se rajará indefectiblemente, porque la adherencia con las armaduras no habrá llegado todavía al valor necesario para que la continuidad de aquélla supla la escasa H_{rt} adquirida. Si se mantiene húmeda la pieza algún tiempo, hasta que H_{a} y H_{rt} hayan alcanzado bastante importancia, el hormigón, mantenido por las armaduras, operará su contracción por fraguado y por desecación en condiciones ya más favorables, y aunque su tensión iguale casi á H_{rt}, su plasticidad lo mantendrá sin rotura.

La retracción inicial (por fraguado y desecación) explica las flechas relativamente enormes que toman las piezas *asimétricas* de poco peralte; las fibras superiores se contraen libremente, las inferiores, no; consecuencia inmediata, la curvatura de la pieza, tanto más acentuada cuanto menor sea el peralte.

En la práctica, con las precauciones usuales, la retracción unitaria no pasa, al máximo, de 0,000 25.

Los coeficientes de dilatación difieren poco del hormigón al acero. Si aquél tuviera, como éste, buena conductibilidad, el hormigón armado recibiría escasísimas aplicaciones, por



la necesidad imprescindible de permitir la libre dilatación, cosa difícilmente realizable.

Por fortuna, su conductibilidad es pequeña, lo que, respecto al calor, representa algo parecido á lo que la masa respecto á la fuerza. Las construcciones metálicas siguen las variaciones de temperatura con un corto retraso, por su gran conductibilidad, su escaso calor específico, su masa relativamente pequeña respecto á la superficie lateral. En las de hormigón armado es la conductibilidad, pequeña; el calor específico, grande; la masa, considerable con relación á la superficie, y la propagación de temperaturas en el interior de las piezas es lenta; la distribución de las mismas en una sección dada, muy desigual, y la dilatación final, resultante de las diversas elementales, se opera con gran retraso y sin corresponder en magnitud á la de la temperatura exterior.

Puede formarse una idea del fenómeno citando las observaciones hechas en Montsouris, sobre la propagación de temperaturas en el terreno. Una oscilación total de 35° en la superficie, se reduce á 3°,6 á 25 centímetros de profundidad, á 0°,4 á 50 y á nada á 75.

A los 25 centímetros, los máximos, que en el exterior tienen lugar de una á dos de la tarde, se presentan á las ocho; á 50 centímetros, á la una de la madrugada. Claro es que se trata aquí de un caso extremo, donde la influencia de todos esos elementos es máxima.

A la temperatura ordinaria el calor específico del hormigón usual es 0,16, y se va elevando hasta 0,21 á 800°; el del acero es 0,12. El coeficiente de conductibilidad, número de calorías transmitidas por centímetro cuadrado de superficie, por centímetro de espesor, por segundo y por grado centígrado de desnivel térmico, es 0,0022 en el hormigón



apisonado y 0,2800 en el acero; es decir, 127 veces menor en aquél.

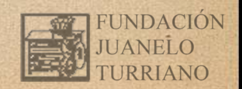
El ladrillo tiene un calor específico de 0,19, 1,2 veces mayor que el del hormigón; pero como su peso es menor (0,75 veces), á igualdad de volumen absorbe éste $\frac{1}{1,2 \times 0,75} =$ 1,11 veces más que aquél. El coeficiente de conductibilidad del ladrillo es 0,0068, 3,1 veces el del hormigón. En suma, la relación final es $\frac{1,11}{3,1} = 0,36$; es decir, que un muro de hormigón de 36 centímetros de espesor equivale térmicamente á otro de ladrillo de 100; ambos se calientan lo mismo y dejan pasar igual número de calorías, supuestas iguales las demás condiciones.

La transmisión hacia el interior de un flujo de calor uniforme alrededor de una pieza se opera por capas concéntricas. Si el flujo cesa ó disminuye rápidamente, la transmisión seguirá, sin embargo, de una capa hacia el centro, mientras que del exterior á aquélla empieza á operarse una transmisión negativa. Para que la temperatura llegue á uniformarse en toda la sección, se necesitará un tiempo considerable, tanto mayor cuanto mayor sea la relación de la sección al perímetro.

Ese desequilibrio térmico de un punto á otro de una misma sección no influye sensiblemente en la cohesión, y tampoco ejerce influencia apreciable la desigualdad de dilatación del hormigón y de las armaduras.

Dos fibras contiguas, cuya temperatura se eleva θ°, tomarían, de estar libres, alargamientos $\delta_h \theta$ la de hormigón, y $\delta_a \theta$ la de armadura; unidas por la adherencia, toman uno intermedio $\lambda \gtrless \begin{smallmatrix} \delta_h \theta \\ \delta_a \theta \end{smallmatrix}$, igual para ambas.

El hormigón está relativamente alargado, y sufre una



tensión unitaria $E_h(\lambda - \delta_h \theta)$; la barra soporta una compresión $E_a(\delta_a \theta - \lambda)$.

La resultante de los esfuerzos totales sobre las secciones h y a debe ser nula; luego haciendo $\frac{a}{h} = q$ (cuantía, relación de secciones) y $r = \frac{E_a}{E_h}$ (relación de coeficientes de elasticidad):

$$h \times \frac{E_a}{r}(\lambda - \delta_h \theta) = qh \times E_a(\delta_a \theta - \lambda);$$

$$\lambda = \frac{rq\delta_a + \delta_h}{1 + rq}\theta.$$

La tensión del hormigón será:

$$H = E_a q \times \frac{\delta_a - \delta_h}{1 + rq}\theta.$$

y la compresión de la armadura:

$$A = E_a \times \frac{\delta_a - \delta_h}{1 + rq}\theta.$$

Cuanto mayores sean E_a, q, θ y $(\delta_a - \delta_h)$ y menor r, mayor será H. Para valores respectivos de 2.250.000 kilogramos por centímetro cuadrado, 0,025, 30°, 0,000 002 y 15, resultan $H = 2,46$ y $A = 98,4$ kilogramos por centímetro cuadrado.

El mismo cálculo es aplicable á una retracción ó dilatación por fraguado, sin más que sustituir por su valor unitario, ϱ, el homólogo $(\delta_a - \delta_h)\theta$. Para $\varrho = 0,000\,4$, con los mismos datos restantes, la tensión H es de 16,35 kilogramos por centímetro cuadrado.

Se ve claramente la insignificancia de efecto de la desigual dilatación de los dos elementos, aun en el caso supuesto, exagerado. En cambio la retracción produce tensiones



iniciales, que en fuertes cuantías q, como la supuesta, pueden alcanzar al valor de H_{rt}.

Para formar una idea aproximada de la propagación de temperaturas, consideremos una placa indefinida, de espesor e, á una temperatura t^0 en toda su masa. Bruscamente se eleva la temperatura exterior, por una sola de las caras, á T^0. Al cabo de un tiempo, τ, en la cara opuesta habrá una elevación $t_1 - t$ ó δ_1, que supondremos:

$$\delta_1 = k\,(T - t = \Delta) \times \frac{\tau}{e};$$

admitiendo que el incremento, δ_1, sea proporcional á una constante específica, k, al desnivel térmico, Δ, y al tiempo, τ, y esté en razón inversa del espesor atravesado, e.

Esta ley expresa la propagación de t en función del tiempo, y es esencialmente distinta de la de Fourier:

$$\delta = \Delta \times e^{(-cx)}$$

que se refiere á la distribución, en un instante dado, de temperaturas, en un prisma de longitud indefinida, sumergido en un ambiente á t^0 y con un plano transversal ($x = o$) mantenido á T. Es, en cambio, idéntica á la que expresa el número de calorías transmitidas, por unidad de superficie, al cabo del tiempo τ, á la distancia ó espesor e, de la cara que recibe el flujo calorífico:

$$C = k_1\,(T - t = \Delta) \times \frac{\tau}{e}$$

en la que k_1 tiene, para el hormigón, el valor ya citado, 0,0022 calorías por centímetro cuadrado, centímetro lineal, segundo y grado. La constante homóloga, k, es un número de grados por centímetro lineal, segundo y grado.



Cualesquiera que sean k, τ, e, el incremento δ sólo podrá, como límite, llegar á Δ; el de $k\frac{\tau}{e}$ es la unidad; los valores de k variarán según las unidades de τ y e que se adopten.

Al cabo de otro período igual, τ, durante el cual el desnivel térmico entre el ambiente y la cara posterior será inicialmente $(\Delta - \delta_1)$, habrá un nuevo incremento

$$\delta_2 = k(\Delta - \delta_1)\frac{\tau}{e} = \delta_1 - k\frac{\tau}{e}\delta_1$$

ó bien, haciendo $k\frac{\tau}{e} = C$:

$$\delta_1 = C\Delta$$

$$\delta_2 = C\Delta - C^2\Delta = C\Delta(1 - C).$$

Al cabo de otro período igual, τ:

$$\delta_3 = C(\Delta - \delta_1 - \delta_2) = C\Delta(1 - C)^2,$$

y, en general, en el período de orden p:

$$\delta_p = C\Delta(1 - C)^{p-1}.$$

El incremento total será, al cabo de n períodos iguales:

$$\Sigma_o^n \delta = C\Delta \times \left[1 + (1 - C) + (1 - C)^2 + \dots + (1 - C)^{n-1}\right]$$

$$= C\Delta \times \frac{1 - (1 - C)^n}{C} = \Delta\left[1 - (1 - C)^n\right]$$

cantidad siempre $< \Delta$, como es lógico, y cuyo límite, al cabo de un tiempo indefinido, es:

$$C\Delta \times \frac{1}{C} = \Delta.$$

En la realidad no es así, y la temperatura se iguala al cabo de un tiempo, tanto más corto cuanto más se aproxime C á la unidad.



Las pocas experimentaciones hasta ahora hechas no detallan las variaciones de temperatura bajo los desniveles, Δ, ordinarios en las construcciones, sino bajo otros mucho más altos, para estudiar los efectos de los incendios. La relación general de dos incrementos sucesivos que, según nuestra hipótesis, debiera ser constante, $(1 - C)$, va disminuyendo á medida que el desnivel $\Delta - \Sigma\,\delta$ decrece progresivamente, y C va, por tanto, aumentando. Lo más desfavorable es suponer $C = 0{,}50$, que hace máximo el incremento $C(1 - C)$. Por otra parte, los valores experimentales dan, á lo sumo, $C = 0{,}52$; en general son menores.

La variación proporcional á $\frac{1}{e}$ también presenta anomalías, pero establecido el régimen se aproxima mucho á lo supuesto. La constante $k = \frac{e}{\tau}\,C$, es, para las unidades hora y centímetro, 0,50.

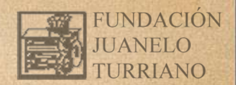
Aplicando el cálculo al plano á 10 centímetros de una cara, bajo un desnivel *súbito* de 30°, mantenido *constante* durante doce horas, resulta

$$\frac{k\,\tau}{e_1} = c = \frac{0{,}5}{10} = 0{,}05;\ (1 - c) = 0{,}95;\ (1 - c)^{12} = 0{,}713$$

$$\Sigma_o^{12}\,\delta = 30^\circ \times 0{,}287 = 8^\circ{,}61.$$

Si por la otra cara ha sufrido un desnivel de 15°, también *súbito* y *constante*, el plano medio habrá aumentado en total, $8^\circ{,}61 \times 1{,}5 = 12^\circ{,}91$.

Esto da una idea, aunque grosera, del proceso de la elevación de temperatura en una obra. En piezas de dimensiones medias, aun con la exageración supuesta de establecerse bruscamente y de reinar durante doce horas seguidas un



alza termométrica de 30° por una cara y de 15° por la otra, para un cuerpo que ya estaba á la temperatura ambiente, el aumento es relativamente pequeño.

Supongamos ahora que durante otras doce horas se restablece la temperatura inicial. El análisis será mucho más complicado, porque cada fibra de la pieza tiene entonces una temperatura distinta. Empezarán á enfriarse las más próximas á los paramentos, y la temperatura irá, *en general*, bajando progresivamente dentro de la pieza; pero, durante cierto tiempo, continuará la propagación de temperatura en el mismo sentido que antes. Mientras, por ejemplo, á un plano al tercio del espesor del paramento más calentado, no llegue la baja de temperatura, desde allí hacia la otra cara seguirán subiendo las temperaturas hasta otro plano donde entonces haya alcanzado la influencia del enfriamiento de la otra cara. Al cabo de un cierto tiempo, en lugar de existir temperaturas decrecientes de uno á otro paramento, la distribución será inversa; habrá una zona interior, á partir de la cual temperatura decrecerá hacia uno y otro lado.

Al comenzar un nuevo período de elevación brusca de la temperatura ambiente, proseguirá durante algún tiempo la ley anterior; habrá temperaturas decrecientes hacia ambos lados, y el plano de máxima seguirá moviéndose hacia el paramento menos calentado al principio, hasta que nuevamente se vuelva á la primitiva ley de crecimiento gradual, de las caras al interior.

En cada momento la dilatación total será una resultante de las elementales; habrá fibras que tomen su dilatación exacta; otras que resulten *relativamente acortadas* por la acción de las próximas y, por lo contrario, otras que estén *relativamente alargadas*, también por su cohesión con las inmediatas. Y á tenor de esto, un desequilibrio molecular



entre esas fibras, unas comprimidas, otras, quizá, libres y otras extendidas.

Supongamos, para seguir formándonos una idea grosera del fenómeno, que al final de las doce horas, la temperatura de la pieza sea *una sola,* la del plano medio; y que durante otras doce horas, la del ambiente vuelva á ser la inicial. Aplicando lo mismo, ya hecho, para un desnivel, igual ahora á 12°,91, resultará un decremento de temperatura en dicho plano, de $12{,}91 \times 0{,}287 = 3°{,}70$ por cada cara, ó en total 7°,40.

En general, el incremento resultante en las veinticuatro horas, supuestos por una cara desniveles dobles que por la otra, es

$$\text{aumento: } 1{,}5\,\Delta\,[1-(1-c)^n] = +\,1{,}5\,f\Delta;$$

$$\text{disminución: } 2\,(\Delta - 1{,}5\,f\Delta) \times f = -\,2\,f\Delta + 3\,f^2\,\Delta;$$

$$\textit{incremento: } f \times \left(3f - \frac{1}{2}\right) \times \Delta;$$

ó, haciendo $f \times \left(3f - \frac{1}{2}\right) = c_1$, será en resumen, $c_1\,\Delta$.

Al cabo de otras veinticuatro horas, bajo análogo régimen, pero á partir de un desnivel $\Delta - c_1\,\Delta = \Delta\,(1-c_1)$ habrá un nuevo incremento final $c_1\,(1-c_1)\,\Delta$, y así sucesivamente, según la misma ley que para los incrementos horarios, y el resultante de n días consecutivos será:

$$\Sigma_o^n d = c_1\,\Delta\,[1 + (1-c_1) + (1-c_1)^2 + \ldots\ldots + (1-c_1)^{n-1}]$$

$$= \Delta\,[1-(1-c_1)^n].$$

Apliquemos esto á la misma placa de 20 centímetros: $c_1 = 0{,}104$; $(1-c_1) = 0{,}896$; $(1-c_1)^{30} = 0{,}037$; $[1-(1-c_1)^{30}] =$



0,963; al cabo de treinta días la temperatura del plano medio habrá subido 0,96 Δ ó, prácticamente, Δ.

Si rehiciéramos el cálculo para una placa de mayor espesor, 30 centímetros, por ejemplo, la disminución de las constantes c y c_1 conduciría á un plazo mucho mayor para alcanzar prácticamente en el plano medio el incremento Δ.

No hay que dar á estos guarismos otro valor que el de indicaciones muy vagas, el de límites muy por encima de la realidad. Las condiciones supuestas son muy exageradas, siempre en sentido desfavorable. En la práctica, en la placa de 20 centímetros, la temperatura del plano medio no llegará nunca al cabo de doce horas á lo calculado: ni el sol calienta bruscamente, ni tampoco el desnivel térmico es, ni mucho menos, constante durante ese período. Por los dos motivos, el cálculo da, pues, mucho más de lo real. En cambio, el proceso del enfriamiento se aproxima más á la verdad, puesto que la baja de temperatura afecta igualmente á ambas caras. Aun así, hay exageración.

La transmisión de temperaturas se hace, en suma, con lentitud y con un retraso considerable. Si la variación del ambiente sigue una ley sinusoidal, en lugar de la rectilínea quebrada supuesta, la lentitud y el retraso serán mucho mayores, así como disminuirá la cuantía de los incrementos de t, y siempre tanto más, cuanto mayores sean los espesores que se consideren. De aquí que, conforme á la observación, las dilataciones y contracciones, que desde luego no corresponden á las temperaturas máximas ni mínimas de las fibras, sino á una especie de *media*, resultante de todas ellas, tampoco correspondan ni á los máximos ni mínimos de las oscilaciones diarias, sino que vengan á ser correlativas con las temperaturas medias y sigan la ley, á grandes rasgos si-



nuosidal, de la variación de estas medias en el transcurso de las estaciones.

El espesor es el elemento que más influye; las piezas delgadas, de 6 á 10 centímetros, siguen con algún retraso, y algo aminoradas, las oscilaciones diurnas y nocturnas; se debe tener en cuenta la dilatación correspondiente al desnivel entre las *medias* de la noche más fría y del día más cálido. Las piezas gruesas, de 30 centímetros en adelante, son mucho menos sensibles, y sólo siguen la oscilación anual, á grandes rasgos; procede para ellas tomar como base el desnivel entre las *medias* de todo el invierno y de todo el verano. Y en las piezas de regulares dimensiones, la diferencia entre las *medias* del mes más frío y del más caluroso.

Así, en nuestros climas, con una oscilación absoluta de 60°, que es preciso tener en cuenta para las construcciones metálicas, basta contar con la de 40° para las piezas delgadas de hormigón armado, de 30° para las intermedias y de 20° para las gruesas.

El coeficiente δ_h oscila poquísimo, según la composición de los hormigones, alrededor de 0,000 010 (1).

Dichas oscilaciones totales implican variaciones unitarias de 0,000 4, 0,000 3 y 0,000 2, respectivamente.

Si los extremos de una pieza ú obra son libres, sobre apoyos que pueden ceder algo por su elasticidad, ó por giro de su base sobre el terreno, las temperaturas en nada influyen prácticamente. Así, en el segundo embarcadero de las Minas de Cala, con longitud total de 232 metros, la oscila-

(1) Muchos autores se obstinan en citar á este propósito los antiguos é inexactos valores de Bouniceau, que hacen subir δ_h á 0,000 014; otros fijan este mismo guarismo para el *cemento puro*, lo que, aun suponiéndolo cierto, para nada sirve; el *cemento armado* (nombre al que también se aferran muchos) ni existe ni puede existir.



ción total es de 46,8 milímetros, 23,4 en cada extremo; es decir, ± 12 milímetros respecto á la posición media.

Si los apoyos no ceden *en absoluto*, á las variaciones unitarias de ± 0,000 2, ± 0,000 15 y ± 0,000 1, corresponden cargas de ± 30, ± 22,5 y ± 15 kilogramos por centímetro cuadrado, independientemente de la longitud absoluta. Las compresiones pueden llegar á hacerse efectivas, las tensiones, no; sólo alcanzarán el valor real de H_{rt}, y si lo exceden, la pieza se rajará en uno ó varios puntos.

En el capítulo VII, (II), estudiaremos las disposiciones que conviene adoptar para hacer frente á las alteraciones de longitud, que, en resumen, en la práctica no alcanzan á 0,000 25.

VII

Deformación.

De lo hasta aquí expuesto, podemos resumir las leyes á que obedece la deformación del hormigón armado.

El hormigón que no ha sufrido carga alguna es un material imperfectamente elástico; su estado molecular se modifica al contrarrestar los efectos de una primera carga; al pasar ésta desde cero hasta el valor que tenga, las deformaciones elementales no van siendo proporcionales á los valores sucesivos de aquélla; la deformación total resultante depende no sólo de ese valor final, sino del tiempo empleado en alcanzarlo y del tiempo durante el que su acción persista. Al cesar la carga, el equilibrio molecular se modifica nuevamente, y queda en un estado distinto del inicial; desaparece una parte de la deformación, pero queda, de un modo permanente, otra parte residuaria.



En una nueva aplicación de la misma carga, se reproduce el fenómeno en la misma forma, pero con menor intensidad. Las nuevas deformaciones, total y residuaria, son menores, y así sucesivamente, hasta que más ó menos pronto, según el valor de la carga, la agregación molecular llega, por sucesivas modificaciones, á un estado permanente; nuevas aplicaciones de la misma carga sólo producen deformaciones *perfectamente elásticas,* sin residuaria alguna.

Si ahora se aplica una nueva carga superior á la primera, el proceso se reproduce, y termina análogamente por un nuevo régimen molecular estable.

A valores, crecientes hasta un cierto límite, de las cargas, corresponden, después de reiteradas suficientemente, estados moleculares *estables* y caracterizados por coeficientes de elasticidad, permanentes en cada estado, pero cada vez *menores* de uno á otro.

Así, pues, resume Rabut:

1.° *Toda carga que obra por primera vez, deja siempre una deformación permanente.*

2.° *La deformación producida por reiteración de una misma carga, llega á ser perfectamente elástica.*

3.° *Las deformaciones elásticas relativas á cargas crecientes, aumentan con mayor rapidez que éstas.*

El hormigón pudiera decirse que se va adaptando sucesivamente, en lucha por su existencia, á las condiciones de trabajo que se le van imponiendo. Pero la energía que en esa lucha despliega, va disminuyendo; llega á adaptarse á los sucesivos estados de lucha, pero se va debilitando. En cada uno de ellos llega á ser un cuerpo de elasticidad *perfecta,* pero esa elasticidad es cada vez *menor.*

Llegado á cierto límite, agotada su energía de adaptación, el hormigón es vencido. Una nueva carga, mayor que



las ya soportadas victoriosamente, produce un nuevo cambio de agregación molecular; pero este cambio es tan intenso que, al repetirse aquélla, la nueva deformación permanente, lejos de disminuir respecto á la anterior, crece, y cada vez más, hasta que, perdida progresivamente la energía del material, su agregación molecular se destruye y sobreviene la rotura.

¿Cómo se verifica este proceso de adaptación? Según unos, por plasticidad; según otros, por fragmentación.

Dice Rabut, partidario de lo último:

En todas las partes sometidas á tensión, á poco que valga la carga, el hormigón se fisura de trozo en trozo, quedando éstos mantenidos por las armaduras. Dentro de cada trozo, en que las fibras conservan su continuidad, el módulo de elasticidad, rebajado por el régimen de trabajo que ha producido las fisuras, es independiente del esfuerzo que esas fibras sufren. Dos aparatos de medida contiguos acusan, frecuentemente: el primero, una deformación nula; el otro, un alargamiento grande; es que en la zona de influencia del segundo hay una fisura ó *una estricción*.

Una nueva carga produce ó el ensanche de las fisuras preexistentes ó la aparición de otras nuevas, y, de todos modos, una nueva deformación permanente. Por lo contrario, la misma carga modifica muy poco, cada vez menos, ó no modifica nada, el estado de fisuración; la deformación se debe únicamente á la de las armaduras, y es, por tanto, perfectamente elástica. Cargas crecientes provocan nuevas fisuras, cada vez más numerosas, y, por tanto, las deformaciones, aunque elásticas, van siendo mayores.

En las partes comprimidas, el henchimiento transversal *debe* producir la fisuración longitudinal, y la explicación subsiste.



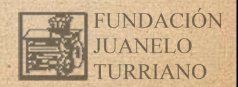
Por lo contrario, Considère sostiene que no hay tales fisuras, sino una serie de estricciones, que, en lugar de localizarse en una pequeña zona, son muy numerosas, pudiera decirse continuas. En ellas, mantenido el hormigón por la adherencia con las armaduras, se estira *plásticamente*, es decir, sufriendo, punto por punto, el máximo alargamiento que, en condiciones ordinarias, sólo alcanza en la zona de estricción, y desarrollando, también punto por punto, el máximo esfuerzo que, sin romperse, puede sufrir, esfuerzo que ya no guarda relación alguna con el alargamiento.

Algunos de los experimentos de Considère lo demuestran innegablemente; otros, repetidos por él y por diversos Ingenieros, no lo confirman, pues se observan fisuras con alargamientos iguales ó poco mayores que los tolerados por el hormigón sin armar.

En la práctica, en cuyas condiciones parece ponerse mejor Rabut, en hormigones y no morteros, fraguados y desecados al aire, y no en arena húmeda, los estados iniciales son completamente distintos.

No puede haber en aquéllos la homogeneidad que en éstos: las fisuras se producirán con más facilidad y frecuencia en las zonas donde haya menor compacidad. El fraguado y desecación provocan forzosamente un estado inicial de tensión muy enérgico, según hemos visto.

Pero si la producción de fisuras es innegable, en el número que pretende Rabut es inadmisible. Y en cambio, limitada á *longitudes medianas*, la explicación de Considère es perfectamente lógica. Dentro de cada trozo entre fisuras el trabajo unitario que el alargamiento *total* del trozo impone á las fibras de hormigón no es constante; nulo en las fisuras, crece gradualmente hacia el centro, y allí puede localizarse la estricción y allí se producirá una nueva fisura, cuando una



nueva carga haga que ese alargamiento unitario, *local*, venza el resto de cohesión hasta entonces subsistente. En la fisura, la armadura trabaja sola; dentro del trozo ayuda el hormigón, nada en los bordes, algo, aunque sea poco, en el centro; de ahí la diferencia entre alargamientos unitarios medidos en uno y otro sitio.

En resumen: los dos fenómenos deben producirse, y se producen en la práctica, pero no uno de ellos exclusivamente. El de Considère predomina durante el fraguado, desecación y primeros períodos de carga; el de Rabut, á veces puede presentarse también entonces, pero en reducida escala y tomando mayor importancia á medida que las cargas sean mayores.

Consecuencias prácticas. Para el cálculo de la resistencia sería imprudente, ilógico, tener en cuenta la del hormigón extendido, que existirá efectivamente en muchas partes, pero faltará en otras. Para el cálculo de las deformaciones, precisa, por lo contrario, tener en cuenta dicha resistencia, aunque aplicando coeficientes prácticos de corrección, necesarios para evaluar la influencia de las fisuras.

Cuando en lugar de piezas aisladas, se trata, como en general ocurre, de piezas que forman un conjunto, la solidaridad, la continuidad de la masa, aun existiendo fisuras, tiene una influencia enorme: las cargas locales, en lugar de limitar su efecto á las piezas directamente influídas, se distribuyen y afectan á partes considerables del conjunto; las deformaciones locales sufren, lógicamente, reducciones á veces enormes. Esa es la cualidad más saliente y ventajosa del hormigón armado, la cooperación y mutua ayuda que sus elementos se prestan y que tiende al «todos para uno, y uno para todos».

Las tres leyes enunciadas definen las deformaciones par-



ciales; son necesarias, pero no suficientes, y precisa conocer la que rige el conjunto de deformaciones de las fibras de una sección. La hipótesis de Navier, la invariabilidad de la forma plana de una sección, es la base del cálculo de sólidos homogéneos. Casi exacta en general, siempre que las variaciones de contorno de la sección y las de valor del momento flector sean graduales, se aleja bastante de la realidad cuando cualquiera de esos elementos cambia bruscamente (secciones en T, L, E y derivadas; puntos de aplicación de fuerzas aisladas). Admitida en todos los casos, *á falta de otra mejor*, la ley de variación lineal representa á un tiempo la de deformaciones y de cargas en las fibras de una sección; se pasa de unas á otras por un simple cambio de escala, por intervenir ó no el coeficiente de elasticidad *prácticamente constante*.

En los cuerpos de elasticidad variable, y por añadidura heterogéneos, resulta de la experimentación que esa misma hipótesis de la conservación de la forma plana de las secciones es *aceptable* con el mismo grado de exactitud y con las mismas restricciones, ó, mejor, con alguna menos, pues en las secciones en T, con las proporciones prácticamente empleadas, induce á menos error que en material homogéneo.

Haya ó no grietas (á veces hechas éstas de intento) en una pieza, las deformaciones del hormigón varían *casi rigurosamente* según una recta, salvo en las partes extendidas inmediatas á una fisura.

Las deformaciones de las armaduras varían también así, y concuerdan con las del hormigón contiguo, *cuando no hay fisuras*.

En las zonas fisuradas la deformación de las armaduras sobrepuja á la del hormigón, y hay, por tanto, deslizamiento de aquéllas; pero la diferencia no es grande en las condiciones usuales de trabajo.



La ley de variación lineal es prácticamente admisible, *á falta de otra mejor*, para las deformaciones. Pero no así para las cargas, en razón de la variabilidad de E_h. En la zona comprimida, dentro de los límites usuales de H, E_h varía poco y puede, exagerando en sentido *favorable*, ser tomado como constante. En la zona tendida E_h decrece rápidamente hasta anularse, y á partir de cierta distancia de la fibra neutra, á alargamientos muy distintos corresponden cargas unitarias iguales á la límite, susceptible de ser soportada.

En suma: *las deformaciones durante la flexión son prácticamente proporcionales á las distancias de las fibras, de hormigón ó de metal, al eje neutro.*

Las cargas unitarias de las armaduras y del hormigón comprimido guardan también esa proporción: las del hormigón extendido son constantes, salvo en una pequeña zona.

VIII

Coeficientes de seguridad.

Conocidas ya las constantes mecánicas del hormigón y de las armaduras, quedan por fijar los coeficientes de seguridad, que, como su nombre indica, involucran los posibles errores de cálculo, al mismo tiempo que dejan un margen suficiente entre el trabajo real y efectivo y el correspondiente á la ruina de la construcción.

Dos criterios pueden adoptarse para esfablecer esos coeficientes: 1.º Limitar las máximas cargas unitarias á ciertas partes alícuotas de las que en cada caso producen la rotura del material. 2.º Limitar los máximos esfuerzos totales



sobre la construcción á partes alícuotas de los que producen su ruina.

La diferencia entre los dos criterios es fundamental. Según uno, se considera la obra en las condiciones en que realmente ha de prestar servicio; según otro, en condiciones ficticias.

Si los coeficientes de elasticidad fueran constantes hasta el momento de la rotura, ambos criterios serían idénticos; tanto da tomar las partes alícuotas de una carga como las de esfuerzos proporcionales á ella.

Pero tal constancia sólo existe, y de un modo aproximado, durante un cierto período, el de elasticidad perfecta; en los siguientes, la relación entre esfuerzos y cargas varía en cada momento y para cada forma de trabajo.

Calcular los esfuerzos que inmediatamente preceden á la rotura de una obra, implica conocer, ó prever, las deformaciones correlativas, base indispensable en los arcos, piezas capaces de pandear, sistemas hiperestáticos en general. Tales deformaciones son esencialmente permanentes, no guardan relación alguna con las elásticas, únicas admisibles en una obra en servicio; al pasar de las condiciones ficticias á las reales, la paridad entre causas y efectos desaparece, y el cálculo no puede dar idea exacta de nada. Cierta parte alícuota del esfuerzo resulta perfectamente admisible para un elemento de la obra, y produce, sin embargo, deformaciones todavía permanentes é inadmisibles en otro. La única manera de fijar ese coeficiente de seguridad sería construir la obra, provocar su rotura y tomar entonces la parte alícuota del esfuerzo que inicia la ruina.

El primer criterio es el más racional, máxime si, en lugar de relacionar las cargas reales con las de rotura, se las refiere á las límites elásticas. Así ha prevalecido, y es el general



para las construcciones metálicas, cuyas cargas unitarias máximas se fijan generalmente entre el $\frac{1}{2}$ y el $\frac{1}{3}$ de aquéllas, y vienen á corresponder al $\frac{1}{5}$ ó $\frac{1}{6}$ de las de rotura.

En el hormigón armado se pueden adoptar límites análogos para las armaduras, pero no así para el conglomerado.

El metal está en condiciones mucho mejores que de ordinario: ni expuesto á choques, ni á desgaste, ni á oxidación ó corrosión, ni, en general, sometido á punzonado, roblonado, etc., que altere localmente su resistencia. El coeficiente de seguridad de 2 respecto al límite elástico, aumentado prudencialmente en piezas expuestas á grandes variaciones de esfuerzos ó á fuertes trepidaciones, es racional y satisfactorio. En los aceros dulces corrientes, cuyo límite elástico nunca desciende de 2.400 kilogramos por centímetro cuadrado, equivale á hacerlos trabajar como máximo en las más favorables condiciones, á 1.200.

Por compresión nunca se puede llegar á tanto, á no ser en ensayos de rotura; por tracción, tampoco se llega en la realidad, salvo en las fisuras. En la práctica, y sobre la base de prescindir de H_{rt}, las deformaciones siguen siendo elásticas aun para cargas mayores de las que, según el cálculo, producirían alargamiento permanente en las armaduras.

En el hormigón comprimido no existe, rigorosamente hablando, una carga límite elástica; la rotura sobreviene sin que un régimen previo de deformaciones crecientes y permanentes la anuncie; en todo caso habría que considerar como tal carga límite una muy próxima á la de rotura. Esta es muy variable según la edad y, sobre todo, según las dimensiones del trozo en que se mida. Ha sido preciso adoptar como tipo la correspondiente á cubos de 50 centímetros de



sección y con noventa días de fraguado. Para prever las desigualdades y descuidos de ejecución, que pueden influir en gran escala, resulta necesario un coeficiente alrededor de 3,5. La Comisión francesa adopta los $0,28 = \frac{1}{3,57}$ de H_{rc} (carga de rotura en cubos, á los noventa días), para las cargas máximas.

Las instrucciones alemanas fijan el $\frac{1}{5}$ de H_{rc} á los veintiocho días, exigiendo que este valor alcance, por lo menos, á 180 kilogramos por centímetro cuadrado, forzando la riqueza, si para conseguirlo es necesario. Parece esto en contradicción con lo dicho; pero debe recordarse que los 160 á 200 kilogramos por centímetro cuadrado definidos por la Comisión francesa son realmente *mínimos* que siempre superan los hormigones corrientes.

Para H_{rd} y H_{α}, cargas de desgarramiento del hormigón y de deslizamiento de las armaduras, adopta dicha Comisión 0,028 de H_{rc}. Hemos visto que ambos pueden considerarse, en hormigones corrientes, como iguales, cuando menos, á 0,10 H_{rc}. El coeficiente de seguridad es, por tanto, el mismo para H_{rc}, H_{rd} y H_{α}, $\frac{1}{0,28} = 3,57$, aparentemente, en realidad generalmente mayor, sobre todo para las dos últimas.

En cuanto á H_{rt}, se supone nulo en los cálculos; como en realidad tiene un valor no despreciable, esa hipótesis produce, implícitamente, una mayoración real de los coeficientes de las otras tres H.

El coeficiente de seguridad final, del conjunto de hormigón armado, parece que no debiera ser arriba de 2 á 3, y, sin embargo, resulta, en general, mucho mayor. Se envanecen muchos constructores anunciando que obras suyas, experimentadas hasta la rotura han exigido para ello sobrecar-

6

gas seis, ocho, diez veces mayores que las calculadas. Y es sencillamente que pretenden prolongar hasta el momento de la rotura la ley de proporcionalidad, que sólo existe dentro del período elástico.

Si en los aceros usuales el momento de elasticidad, el que corresponde á una carga igual á la límite elástica en las fibras extremas, viene á ser una mitad del momento de rotura, en el hormigón armado la relación es mucho menor siempre, aunque varíe bastante según la cuantía y distribución de la armadura, y peralte de las piezas.

Cuando la fibra más tensa del hormigón empieza á alargarse plásticamente, la carga de la armadura es todavía pequeñísima; se pueden aumentar mucho las sobrecargas, y, aunque aparezcan fisuras, las deformaciones de la pieza, debidas á alargamientos elásticos de la armadura, son totalmente elásticas también. A medida que las sobrecargas crecen, la parte de hormigón alargada plásticamente va aumentando en importancia. La elasticidad de la armadura, sumada con la del hormigón no alterado, llega á ser insuficiente para reducir á su primitiva longitud las fibras plásticamente alargadas. Aparece la deformación permanente y se acentúa á medida que aquella parte del hormigón alterado sigue ganando terreno. La carga de la armadura aumenta con rapidez; la del hormigón tendido permanece estacionaria, y la del comprimido crece lentamente.

Se llega, por fin, á la rotura del hormigón extendido; aparecen fisuras muy perceptibles, que van aumentando en número y dimensiones. La práctica demuestra que la rotura total está aún muy lejos y que sólo sobreviene, en general, cuando en las piezas rectangulares se fragmenta la parte comprimida, y en las en forma de T, cuando el alma se despega á trozos de las armaduras por deslizamiento de éstas



y se desprende por roturas oblicuas, orientadas según las líneas de máximas compresiones.

Las cargas unitarias que en las más favorables condiciones admitiremos, serán, para los tres tipos de hormigón: por compresión, *45, 50* y *56* kilogramos por centímetro cuadrado; por desgarramiento del conglomerado y lo mismo por adherencia de éste con las armaduras, *4,5, 5,0* y *5,6;* por tracción en el esqueleto metálico, *1.200* kilogramos por centímetro cuadrado.

No todas las construcciones soportan esfuerzos del mismo género, ni tampoco son susceptibles de cálculo igualmente aproximado. El coeficiente de seguridad no puede ser uno mismo para todas. Pero sería complicado atenerse á diversos valores prácticos de H y de A, aplicables á cada caso, y preferimos conservar siempre los ya formulados, á reserva de aumentar oportunamente los coeficientes de seguridad, estableciendo el cálculo, no para las sobrecargas reales, sino para estas mismas, amplificadas virtualmente, multiplicándolas por 1,20, 1,33, 1,50, etc., según la importancia que los esfuerzos no previstos (dinámicos, accidentales, secundarios) puedan tener, y según el grado de mayor confianza que se quiera dar á la obra.



CAPÍTULO III

CÁLCULO EN GENERAL—CARGAS UNIFORMES

I

Sólidos heterogéneos.

Consideremos dos piezas prismáticas paralelas, que se compenetran y sueldan íntimamente, merced á su adherencia lateral, que las obliga á deformarse idéntica y simultáneamente.

Supongamos que las dos piezas (fig. 27) tienen un plano

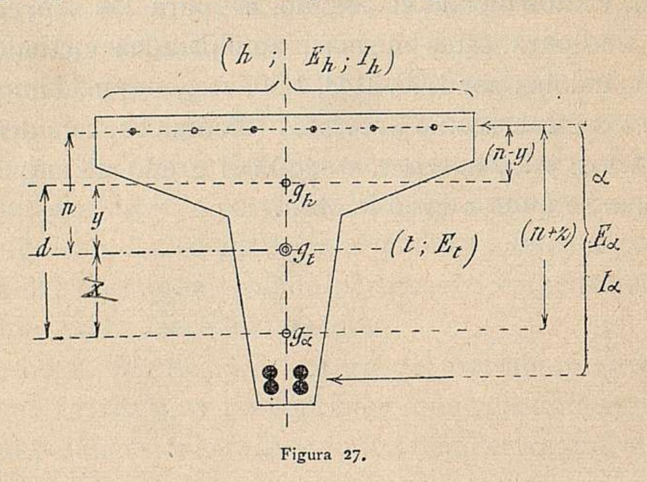


Figura 27.

principal común. Sean: d, la distancia entre los centros de gravedad, g_h, g_α, de las secciones respectivas h, α; I_h, I_α, los momentos de inercia respecto á las normales al plano prin-



cipal, tiradas por g_h, g_α; y E_h, E_α, los coeficientes de elasticidad respectivos.

Tratemos de sustituir al sistema (h, α), uno que mecánicamente le equivalga. Para ello, consideremos una pieza ficticia, que tenga el mismo plano principal, y sección t y coeficiente de elasticidad, E_t, definidos por la condición:

$$E_t \times t = E_h \times h + E_\alpha \times \alpha \tag{1}$$

que expresa que la relación $\frac{F}{\Delta}$, de las fuerzas á las deformaciones, ó sea la *fuerza por unidad de deformación*, es en la pieza ficticia igual á la suma de las correspondientes á las piezas compenetradas.

Su centro de gravedad estará entre g_h, g_α y lo definiremos por las condiciones:

$$\left.\begin{aligned} E_\alpha \times \alpha\,(y+z) &= E_t \times t \times y \\ E_h \times h\,(y+z) &= E_t \times t \times z \end{aligned}\right\} \qquad y + z = d,$$

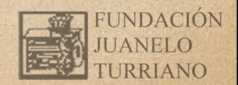
que expresan la igualdad de momentos respecto á g_h, g_α, de fuerzas $E_\alpha \times \alpha$, $E_h \times h$, $E_t \times t$, correspondientes á una misma deformación en las tres piezas, y que actúen en sus respectivos centros g_α, g_h, g_t.

De esas condiciones resulta:

$$y = d \times \frac{E_\alpha\,\alpha}{E_t\ t} = d \times \frac{E_\alpha}{E_h} \times \frac{\alpha}{h + \frac{E_\alpha}{E_h}\alpha} \tag{2}$$

$$z = d \times \frac{E_h\,h}{E_t\ t} = d \times \frac{h}{h + \frac{E_\alpha}{E_h}\alpha} \tag{3}$$

Acabemos de determinar la pieza virtual por la condición:



$$E_t\, I_t = E_h\, I_h + E_a\, I_a + E_t\, t\, y\, z,$$

que, por (2) y (3), equivale á:

$$E_t\, I_t = E_h\, I_h + E_a\, I_a + \frac{d^2 \times E_a\, a \times E_h\, h}{E_t\, t} \qquad (4)$$

expresión de la igualdad en los dos sistemas, del *producto del cuadrado del radio de giro*, ϱ^2, *por la fuerza por unidad de deformación*, $\frac{F}{\Delta}$.

Las condiciones fundamentales para la equivalencia mecánica son solamente (1) y (4); (2) y (3) son consecuencia de ellas.

Para determinar los tres elementos, t, E_t, I_t, falta una tercera condición: el problema es indeterminado. Podemos, por tanto, fijar uno de aquéllos arbitrariamente, E_t, por ejemplo, que haremos $= E_h$. Entonces la pieza virtual tendrá una sección

$$t = h + \frac{E_a}{E_h}\, a \qquad (5)$$

un centro de gravedad, g_t, definido por (2) y (3), y un momento de inercia

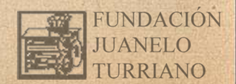
$$I_t = I_h + \frac{E_a}{E_h}\, I_a + \frac{E_a}{E_h} \cdot d^2 \frac{a\, h}{t} \qquad (6)$$

Apliquemos en g_t una fuerza normal F, cuyas componentes en g_h, g_a, sean F_h, F_a. Las cargas unitarias de las piezas elementales serán uniformes é iguales á:

$$H = \frac{F_h}{h}; \quad A = \frac{F_a}{a} \qquad (7)$$

La igualdad de las deformaciones exige que

$$\frac{F_h}{E_h\, h} = \frac{F_a}{E_a\, a} \qquad (8)$$



y, como

$$F_h + F_\alpha = F \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} F_h &= (F_h + F_\alpha) \times \frac{E_h\, h}{E_h\, h + E_\alpha\, \alpha} = F \frac{z}{d} \\ E_\alpha &= (F_h + F_\alpha) \times \frac{E_\alpha\, \alpha}{E_h\, h + E_\alpha\, \alpha} = F \frac{y}{d} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

es decir, que serán iguales los acortamientos (8) siempre que se cumplan (9) y (10), ó que, como habíamos supuesto, F_h, F_α, tengan una resultante F aplicada en g_ι.

Los valores (7) serán, pues:

$$H = \frac{F_h}{h} = \frac{F\, E_h}{E_h\, h + E_\alpha\, \alpha} = \frac{F}{h + \frac{E_\alpha}{E_h}\, \alpha} = \frac{F}{t} \qquad (11)$$

$$A = \frac{F_\alpha}{\alpha} = \frac{F\, E_\alpha}{E_h\, h + E_\alpha\, \alpha} = \frac{E_\alpha}{E_h} \times \frac{F}{h + \frac{E_\alpha}{E_h}\, \alpha} = \frac{E_\alpha}{E_h}\, \frac{F}{t} \qquad (12)$$

Las cargas unitarias son, pues: para la pieza cuyo E se toma como unidad, la misma $\frac{F}{t}$ de la pieza virtual; para la otra, esa misma multiplicada por $\frac{E_\alpha}{E_h}$

Estudiemos ahora el efecto de un momento, M, situado en el plano principal, y sean M_h y F_h, M_α y F_α, los momentos y fuerzas normales, que, aplicadas éstas en g_h y g_α, equivalen al par M.

En los puntos de ordenada η, respecto al eje horizontal que pasa por g_ι, la carga unitaria de la pieza h, será:

$$H = \frac{F_h}{h} + \frac{M_h\,(\eta - y)}{I_h} \qquad (13)$$

y, para la α:

$$A = \frac{F_\alpha}{\alpha} + \frac{M_\alpha\,(\eta - z)}{I_\alpha} \qquad (14)$$



Como M es resultante de F_h, F_a, M_h, M_a:

$$\begin{cases} F_h + F_a = o & (15) \\ M_h + M_a - F_h\, y + F_a\, z = M & (16) \end{cases}$$

Para que las deformaciones sean idénticas, precisa que:

$$\frac{H}{E_h} = \frac{A}{E_a};$$

ó bien:

$$\frac{F_h}{E_h\, h} + M_h \frac{\eta - y}{E_h\, I_h} = \frac{F_a}{E_a\, a} + M_a \frac{\eta + z}{E_a\, I_a} \qquad (17)$$

Como esta condición es forzosa, *cualquiera que sea* η, los términos constantes y los coeficientes de η deben ser separadamente iguales en los dos miembros.

$$\frac{M_h}{E_h\, I_h} = \frac{M_a}{E_a\, I_a} \qquad (18)$$

$$\frac{F_h}{E_h\, h} - M_h \frac{y}{E_h\, I_h} = \frac{F_a}{E_a\, a} + M_a \frac{z}{E_a\, I_a} \qquad (19)$$

(18) significa la igualdad de las desviaciones elementales de la sección transversal respecto á la infinitamente próxima, relativas á una y otra pieza.

(19) expresa que el desplazamiento elástico del punto g_t, según el eje de las piezas, es el mismo para ambas.

Si eliminamos F_a, M_a, entre (15), (16), (18), (19), se llega á:

$$M_h = M \frac{E_h\, I_h}{E_h\, I_t} = M \frac{I_h}{I_t} \qquad (20)$$

$$F_h = - M\, d \frac{h\, E_a\, a}{t\, E_h\, I_t} \qquad (21)$$

Y análogamente á:

$$M_a = M \frac{E_a}{E_h} \frac{I_a}{I_t} \qquad (22)$$

$$F_a = + M d \frac{h E_a \alpha}{t E_h I_t} \tag{23}$$

Finalmente, sustituyendo estos valores en (13) y (14), resultan:

$$H = M \times \frac{\eta}{I_t} \tag{24}$$

$$A = M \times \frac{\eta}{I_t} \times \frac{E_a}{E_h} \tag{25}$$

Las cargas unitarias por flexión, son, como por compresión, las mismas $M \frac{\eta}{I_t}$, correspondientes á la pieza virtual, salvo el factor correctivo $\frac{E_a}{E_h}$ para aquella cuyo E no es el tomado como unidad.

El cálculo de piezas heterogéneas es idéntico al de las homogéneas, aparte dicha corrección, y tan rigoroso como éste, siempre que en ninguno de los elementos superen sus cargas por compresión ó por tracción, á las límites elásticas. En el momento en que dichas cargas límites sean excedidas y uno de los elementos sufra deformaciones permanentes, cae por su base la condición fundamental, la igualdad de alargamientos y su proporcionalidad con los trabajos elásticos que los producen.

Si la relación $\frac{E_a}{E_h} = r$ fuera invariable, aquí terminaría lo relativo al cálculo del hormigón armado. Por desgracia, no es así: en el trabajo por tensión r oscila prácticamente entre 15 é ∞, lo que poco importa, pues ya se ha visto que precisa no tener en cuenta H_{rt} para el cálculo de las cargas unitarias, y basta suponer la *no existencia* de toda la zona que haya de quedar extendida. En el trabajo de compresión r oscila entre límites muy próximos, variables, naturalmen-



te, con la clase de hormigón, edad, etc., así como con la cuantía y distribución de las armaduras, pero susceptibles de una fijación prudencial y satisfactoria.

La sustitución del sólido virtual al sistema heterogéneo es igualmente racional respecto á la acción de esfuerzos transversales, aunque, por la oscuridad general del problema, no pueda demostrarse directamente. De todos modos, sabido es que las deformaciones debidas á tales fuerzas se desprecian en el cálculo de construcciones metálicas. Y, por otra parte, la consideración de los esfuerzos principales simplifica y da á esta parte del cálculo una exactitud prácticamente comprobada y por completo satisfactoria.

Sobre esta equivalencia del conjunto heterogéneo á un sólido ficticio, como *base racional* y sobre la *base experimental,* que la confirma en esencia, aunque la corrige y modifica en detalles, se levanta la Mecánica aplicada del hormigón armado, que es la misma Mecánica aplicada de todos los materiales: una amalgama de principios teóricos, corregidos por los resultados de la experiencia, con los mismos errores y lagunas, debidos á las hipótesis necesarias para abordar el cálculo, y necesitada de los mismos coeficientes de seguridad que involucren las consecuencias de aquéllos.

Desarrollamos metódicamente el cálculo del hormigón armado en las distintas formas de trabajo, hasta llegar á establecer:

1.° Fórmulas *deductivas*, mediante las cuales, definida perfectamente una pieza y las acciones que soporta, puedan ser conocidas, con toda la exactitud posible, las cargas unitarias que el material sufre. Es el cálculo de comprobación; hay incógnitas, pero no indeterminadas; el problema tiene una solución única y concreta.

2.° Fórmulas *inductivas*, gracias á las cuales, conocidas



las acciones que ha de soportar una pieza é impuestos determinados valores para las máximas cargas que haya de sufrir, puedan fijarse las dimensiones, forma y distribución de sus elementos. Es el cálculo del Ingeniero que proyecta; no hay realmente incógnitas, sino indeterminadas; el problema lo es también, y tiene infinidad de soluciones. En general, sólo es resoluble por tanteos; las circunstancias particulares, la condición de máxima economía, la práctica del Ingeniero, le guían para imponerse ciertas condiciones que, con las fórmulas y la fijación arbitraria de algunas de las indeterminadas, hacen concreto el problema. La solución resultante suele no convenir, y es preciso hallar otra ú otras, tanteando, hasta obtener la que parece mejor.

Las fórmulas inductivas á que llegaremos, facilitan mucho en unos casos, en otros evitan, por contener implícitamente otras condiciones, esos tanteos; y, sin embargo, conservan todo el rigor necesario para la práctica.

II

Compresión uniforme.

Las piezas destinadas á soportar presión dirigida según su eje, tienen, generalmente, dos planos de simetría, tanto en el hormigón como en la armadura, distribuyéndose ésta en dos órdenes de barras: primarias, longitudinales, y secundarias, transversales.

Las primeras forman el sólido heterogéneo con el hormigón, cuya elasticidad y resistencia no modifican; suman, como hemos visto, sus secciones, amplificadas en la relación $\frac{E_a}{E_h}$, á la de aquél.



Las armaduras transversales contrarrestan el henchimiento lateral del hormigón y aumentan su resistencia, haciéndole susceptible de soportar, á igual deformación longitudinal, mayor carga; amplifican, virtualmente, su E_h.

La rotura de un prisma vertical de hormigón solo, de escasa altura, de ancho a y espesor $e < a$, tiene lugar siempre según superficies, prácticamente planas, inclinadas un ángulo i con las caras a (fig. 28). El estudio de la sección rectangular ae, se reduce, por tanto, al de la cuadrada e^2, bajo una presión total, $P \times \frac{e}{a}$, puesto que la mínima dimensión, e, es la que determina la orientación de la rotura.

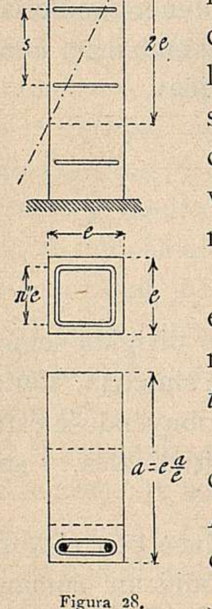


Figura 28.

La inclinación i es debida á que por el henchimiento transversal y por el rozamiento de las bases del prisma sobre los platillos de la máquina, los esfuerzos principales de tensión resultan oblicuos á la pieza, formando con la horizontal el ángulo i, cuya tangente viene á ser en general 0,50. El prisma se rompe *por tensión*.

Si se suprime aquel rozamiento, dichos esfuerzos son horizontales, y el prisma se rompe según planos verticales, siempre *por tensión*.

En el momento de la rotura, las fuerzas que actúan en el plano son: la componente $P \cos i$, de una parte; la cohesión, ó resistencia al desgarramiento según el plano, $H_{rd} \times \frac{e^2}{\operatorname{sen} i}$ y el rozamiento provocado por la componente normal, $P \operatorname{sen} i \times \rho$, de otra; luego:



$$P \cos i = H_{rd} \frac{e^2}{\text{sen } i} + P \text{ sen } i \times \rho;$$

que, para el mínimo de P, conduce á

$$tg\, i = -\rho + \sqrt{1 + \rho^2};$$

valor independiente de H_{rd}. Para el valor experimental del rozamiento, $\rho = 0{,}75$, resulta:

$$tg\, i = 0{,}50;\; H_{rd} = \frac{1}{4} \frac{P}{e^2} = \frac{H_r}{4}$$

H_r es la carga unitaria para la que los prismas de regular altura se rompen, distinta de H_{rc}, carga de rotura en cubos.

Armemos ese prisma de hormigón con cercos metálicos, espaciados s y de sección α'' cada uno. El plano de rotura cortará $\frac{2\,e}{s}$ zunchos, y la suma de secciones será, en total, $2 \times \frac{2\,e}{s} \times \frac{\alpha''}{\cos i}$. Como su carga de rotura transversal, A_d, es muy grande, aun seccionado el hormigón no se producirá el rozamiento en el plano de rotura y el equilibrio estricto, á punto de producirse ésta, da:

$$P \cos i = \frac{H_r}{4} \times \frac{e^2}{\text{sen } i} + A_d \times 2 \times \frac{2\,e}{s} \frac{\alpha''}{\cos i} =$$

$$\frac{H_r}{4} \times \frac{e^2}{\text{sen } i} + 4\, A_d \frac{e}{s} \frac{\alpha''}{\cos i}$$

Prescindiendo del rozamiento en el prisma sin armar, para que haya paridad, resulta que los cercos amplifican la componente de rotura, $P \cos i$, en:

$$1 + \frac{\dfrac{4\, A_d\, e\, \alpha''}{s \cos i}}{\dfrac{H_r\, e^2}{4 \text{ sen } i}} = 1 + 16\, tg\, i \times \frac{A_d\, e\, \alpha''}{H_r\, s\, e^2} =$$



$$= 1 + 16 \frac{A_d}{H_r} \frac{\alpha''}{s\,e}\, tg\, i.$$

Si el lado de los cercos es $n''e$, $(n'' < 1)$, su volumen, en 100 centímetros de pieza, resulta:

$$v = 4\,\alpha'' \times n''\, e \times \frac{100}{s} = 400\,\alpha'' \times n'' \frac{e}{s};$$

y su relación al volumen de hormigón, $V = 100\, e^2$, es lo que llamaremos siempre *cuantía*,

$$q'' = \frac{v}{V} = 4\, n'' \times \frac{\alpha''}{s\,e}. \qquad (26)$$

La amplificación de resistencia en función de la cuantía y para $tg\, i = 0{,}50$, resulta expresada por:

$$1 + 8 \frac{A_d}{H_r} \times \frac{q''}{4\, n''} = 1 + 2 \frac{A_d}{n''\, H_r} \times q'' = 1 + r''\, q''. \qquad (27)$$

La experimentación confirma plenamente el análisis anterior. El coeficiente, r'', de refuerzo debido á la armadura secundaria, es tanto mayor, dentro de ciertos límites, cuanto menor es la separación s, entre cercos. Lo que es lógico, pues cuanto más uniformemente se reparta el metal, más uniforme será su beneficiosa acción de contrarrestar el henchimiento lateral, causa de los esfuerzos principales de tracción.

La Comisión francesa fija, como resultado de su prolija experimentación, los valores límites de r''. Modificándolos ligeramente, para darles forma más práctica, admitiremos para diversos valores de la separación s, ó del número de cercos por metro lineal, $\frac{100}{s} = m$, para:

$s =$	e	$\frac{5}{6}e$	$\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{2}e$	$\frac{1}{3}e$	
$m =$	$\frac{100}{e}$	$\frac{120}{e}$	$\frac{150}{e}$	$\frac{200}{e}$	$\frac{300}{e}$	(28)
$r'' =$	8	10	12	14	16	

suponiendo la relación, n'', del lado del cerco al del cuadrado, de 0,70 á 0,80.

A partir de la separación $s = \frac{1}{3}e$, el efecto de la armadura secundaria es cada vez mayor, sobre todo, si los cercos se hacen circulares: se entra en el *hormigón zunchado,* de propiedades muy características, que oportunamente estudiaremos.

Por suma de un número $\frac{a}{e}$ de cuadrados, e^2, se aplica lo dicho á las secciones rectangulares, ae. Como el peligro de rotura se presenta mucho antes en el sentido e, la disposición más económica de los cercos α'', es la indicada en la parte inferior (fig. 28), correspondiendo á cada cuadrado elemental dos cercos. La cuantía está expresada entonces por

$$q'' = \frac{2\,\frac{a}{e} \times 4\,\alpha'' \times n''e \times \frac{100\,s}{e}}{100\,a\,e} = 8\,n'' \times \frac{\alpha''}{se} \qquad (29)$$

En realidad, la cuantía total es mayor, pues se necesitan barras paralelas á a para la buena trabazón del esqueleto, pero pueden estar más espaciadas que las verdaderamente eficaces.

Introduzcamos ahora una armadura longitudinal, de sección total α' y cuantía $\frac{\alpha'}{h} = q'$. La sección del sólido virtual, equivalente á las dos piezas h y α', es:



$$t = h + \frac{E_a}{E_h} a' = h + r \times q' h = h(1 + rq'). \qquad (30)$$

Rigurosamente, h debe ser la sección estricta del hormigón y q' la relación $\frac{a'}{h + a'}$. Como ésta es siempre muy pequeña, se toma prácticamente h como la sección total de la pieza, y $q' = \frac{a'}{h}$.

La experimentación confirma en general la fórmula anterior, racionalmente establecida; pero la corrige, haciendo palpable la influencia de la distribución de una misma área, a', en pocas ó muchas barras, gruesas ó delgadas, cuya soldadura con el hormigón reparta menos ó más uniformemente su acción de refuerzo. La teoría no tiene en cuenta ese elemento, y de aquí la necesidad de sustituir al número r, que siempre significará la relación de coeficientes de elasticidad; otro número, r', experimental, que englobe la influencia de $\frac{E_a}{E_h}$, más la del modo de repartición de a'.

Sobre los resultados obtenidos por la Comisión francesa, admitiremos, con distintos diámetros, d, de las barras, para:

$$\frac{e}{d} = 10 \text{ ó menos, } 12{,}5,\ 15,\ 17{,}5,\ 20 \text{ ó más;}$$

$$r' = 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16. \qquad (31)$$

Si la carga admisible, prácticamente, en el hormigón aislado es H_c, en la pieza con armadura secundaria de cuantía q'' admitiremos una *carga virtual*, $H_c(1 + r''q'')$. Su efecto, habida en cuenta la mejora de resistencia por el contrarresto del henchimiento lateral, es idéntico al de H_c.

Análogamente á la sección geométrica, h, sustituiremos una *sección virtual*, $h(1 + r'q')$, cuyo trabajo molecular será idéntico al de h.



La presión total admisible sobre la pieza será, por tanto:

$$P = H_c\,(1 + r''q'') \times h\,(1 + r'q'), \qquad (32)$$

producto de la carga virtual por la sección virtual.

La carga $\frac{P}{h}$ será la *aparente* de la pieza; las real y efectivamente sufridas, serán:

$$H = \frac{P}{h} \times \frac{1}{(1 + r''q'')\,(1 + r'q')} \qquad (33)$$

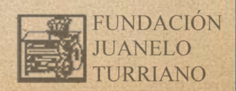
$$A = \frac{P}{h} \times \frac{r'}{(1 + r''q'')\,(1 + r'q')} \qquad (34)$$

Estas dos ecuaciones, con el cuadro resumen (35), que, á continuación, define los coeficientes r', r'', suponiendo á n'' el valor 0,75, permiten deducir, en cualquier pieza, conocidos P, h, q', q'', d, los valores de H y A, cargas reales del hormigón y de la armadura.

(35)

s	d	r'	r''	q''	α''
1,000 e	0,100 e	8	8	3,000 $\frac{\alpha''}{e^2}$	0,333 $q''\ e^2$
0,817 »	0,080 »	10	10	3,600 »	0,278 »
0,667 »	0,067 »	12	12	4,500 »	0,222 »
0,500 »	0,057 »	14	14	6,000 »	0,167 »
0,333 »	0,050 »	16	16	9,000 »	0,111 »

La flexión lateral ó pandeo se presenta en dos formas: parcial, en las barras primarias, y total, en el conjunto de la pieza. Sobreviene la primera: ó por insuficiencia de armadu-



ras secundarias, ó por efecto de una percusión muy violenta; la segunda, cuando la presión excede de un cierto límite dependiente de la *esbeltez mecánica* de la pieza $\frac{l}{\varrho}$, ó lo que es igual, de la *esbeltez geométrica*, $\frac{l}{e}$.

La fórmula de Euler

$$(P_p = H_p\, t) = k\, \pi^2 \frac{E\, I}{l^2}, \tag{36}$$

en la que k vale $\frac{1}{4}$, 1, 2, 4, según las cuatro formas de empotramiento ó apoyo de los extremos, es rigurosa, siempre que los valores de E sean los correlativos á H, al iniciarse el pandeo. P_p, H_p, son la presión y carga críticas en ese momento.

La ley de Ritter

$$H = H_{rc}\left(1 - e^{-1.000\,\lambda}\right), \tag{37}$$

da

$$E_h = \frac{d\, H}{d\, \lambda} = 1.000\,(H_{rc} - H). \tag{38}$$

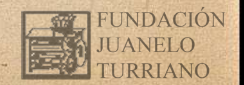
La carga unitaria crítica es:

$$H_p = k\, \pi^2 \frac{E_h\, I_t}{l^2\, t}, \tag{39}$$

en la que podemos sustituir, exagerando en sentido desfavorable, $\frac{I_t}{t}$, cuyo valor medio, para $r' = 12$, $n'' = 0{,}8$, es

$$\rho_t^2 = \frac{e^2}{12} \times \frac{1 + 23{,}04\, q'}{1 + 12\, q'} \tag{40}$$

por $\frac{I_h}{h} = \varrho_h^2 = \frac{e^2}{12}$, siempre menor, 1,052 veces para $q' = 0{,}005$ y 1,099 para 0,010. Resulta así:



$$H_p = k \times 9{,}869 \times 1.000\,(H_{rc} - H_p)\,\frac{\rho_h^2}{l^2}$$

que se reduce á:

$$H_p\left(1 + k \times 9.869\,\frac{\rho_h^2}{l^2}\right) = k \times 9.869\,\frac{\rho_h^2}{l^2}\,H_{rc}$$

$$H_p = \frac{H_{rc}}{1 + \dfrac{1}{k \times 9.869}\,\dfrac{l^2}{\rho_h^2}};$$

ó bien:

$$H_p = \frac{H_{rc}}{1 + \dfrac{1}{10.000\,k}\,\dfrac{l^2}{\rho_h^2}} = \frac{H_{rc}}{1 + f\,\dfrac{l^2}{\rho_h^2}} \qquad (41)$$

en la que el factor f, es, para las cuatro formas de apoyo ó empotramiento 0,000 40, 0,000 10, 0,000 05 y 0,000 025.

Tal es la carga unitaria *crítica*, para la que se *inicia* el pandeo; la *práctica* es lógico hacerla 0,28 de aquélla, con el mismo coeficiente de seguridad, ó sea

$$H_{cp} = \frac{0{,}28\,H_{rc}}{1 + f\,\dfrac{l^2}{\rho_h^2}} = \frac{H_c}{1 + f\,\dfrac{l^2}{\rho_h^2}} \qquad (42)$$

La presión total admisible será, en definitiva, contando con todas las influencias favorables y desfavorables:

$$H_{cp}\,(1 + r''\,q'') \times (1 + r'\,q')\,h = H_c\,\frac{(1 + r''\,q'')\,(1 + r'\,q')}{1 + f\,\dfrac{l}{\rho_h^2}}\,h = P \qquad (43)$$

La amplificación de H_{cp} es legítima, porque si el cálculo se refiere al hormigón solo, es por razón de sencillez, sustituyendo el radio de giro *total*, ρ_t, por ρ_h, lo que implica una minoración de H_{cp}, bastante mayor que la mayoración correspondiente á $(1 + r''\,q'')\,(1 + r'\,q')$.



La tabla siguiente (44) da para distintos valores de $\frac{l}{e} = \frac{l}{\rho\sqrt{12}}$, los de $f = \frac{1}{10.000\ k} \times \frac{l^2}{\rho^2}$ para $k = 1$, las reducciones $\frac{0{,}28}{1 + f\frac{l^2}{\rho^2}}$ y las cargas H_{cp} relativas á hormigones de 300 y 400 kilogramos por metro cúbico.

$$k = 1 \qquad (44)$$

$\frac{e}{l}$	$\frac{l^2}{\rho^2}$	$1+f\frac{l^2}{\rho^2}$	$\frac{0{,}28}{1+f\frac{l^2}{\rho^2}}$	H_{cp}		$H_{cp} \times \frac{e^2}{l^2}$	
				(300)	(400)	(300)	(400)
8	768	1,08	0,259	41,4	51,8	0,6471	0,8096
10	1.200	1,12	0,250	40,0	50,0	0,4000	0,5000
12	1.728	1,17	0,239	38,2	47,8	0,2652	0,3317
14	2.352	1,24	0,226	36,2	45,2	0,1846	0,2305
16	3.072	1,31	0,214	34,2	42,8	0,1337	0,1673
18	3.888	1,39	0,201	32,2	40,2	0,0995	0,1242
20	4.800	1,48	0,189	30,2	37,8	0,0755	0,0945
25	7.500	1,75	0,160	25,6	32,0	0,0410	0,0512
30	10.800	2,08	0,135	21,6	27,0	0,0240	0,0300
35	14.700	2,47	0,113	18,1	22,6	0,0147	0,0183
40	19.200	2,92	0,096	15,4	19,2	0,0096	0,0120

En una comprobación es fácil deducir la carga *aparente*, $\frac{P}{h}$, y la *real*, $\frac{P}{h} \times \frac{1}{(1 + r'\,q') \times (1 + r''\,q'')}$; y comprobar si esta última es $\leq \frac{H_c}{1 + f\frac{l^2}{\rho^2}} = H_{cp}$. La carga real de la armadura primaria será r' veces mayor que la del hormi-



gón; es decir, como límite, $16 \times 45 = 720$, ó $16 \times 56 = 896$ kilogramos por centímetro cuadrado, en hormigones de 300 y 400 kilogramos por metro cúbico.

Suponer, como Hennebique, $H = 25$ y $A = 1.000$ kilogramos por centímetro cuadrado, simultáneamente, y que la influencia del pandeo es nula en la práctica, es completamente irracional. A es r' veces mayor que H, á lo sumo 16, nunca 40, como sería preciso para que tales valores fueran los supuestos.

El problema inverso, proyectar una pieza de longitud l y presión total P, es, como todos sus análogos, indeterminado; se desconocen h y, por tanto, ρ y H_{cp}; q' y q'', y, por tanto, d, r', r''.

Las condiciones del problema fijan la forma de la sección; si ha de ser rectangular, determinan también, por lo menos, aproximadamente, la relación $\frac{a}{e}$ de sus lados, y queda todo reducido, en general, á proyectar una pieza cuadrada para presión total $\left(P \frac{e}{a}\right)$.

Cualquiera que sea la carga admisible, una sección h equivale en resistencia á otra $\alpha' = \frac{h}{r'}$. La primera cuesta, por metro lineal:

$$\frac{h\,(\text{cm}^2) \times 100}{1.000.000} \times P_h\,(\text{ptas./m}^3) = 0{,}0001\, h\, P_h\,;$$

la segunda:

$$\alpha'\,(\text{cm}^2) \times 100 \times 0{,}0078 \times P_\alpha\,(\text{ptas./kg.}) = 0{,}78\,\frac{h}{r'} \times P_\alpha\,.$$

Para el promedio de r', 12, la relación de una á otra, es:

$$\frac{0{,}78\, P_\alpha}{12 \times 0{,}0001\, P_h} = 650 \times \frac{P_\alpha}{P_h}$$

ó 2,6 para $P_\alpha = 0{,}40$ y $P_h = 100$.



Las armaduras primarias *no resisten económicamente*. Conviene reducir q' á lo necesario para la buena ejecución y para dar un cierto aumento de I á la pieza, para lo cual basta 0,005. Análogamente podemos establecer un mínimo económico para $q'' = 0{,}001$. Podemos fijar también los valores de r', r'', con tal de cumplir las condiciones relativas á d y s, definidas por (35); y es lógico imponerse las que dan sus valores máximos, 16. La relación entre la carga aparente y la real, será entonces:

$$\frac{1}{(1 + r'q')(1 + r''q'')} = \frac{1}{1{,}080 \times 1{,}016} = \frac{1}{1{,}097} = 0{,}9116.$$

$$e^2 = 0{,}9116 \frac{P}{H_{cp}};\ e = 0{,}954 \sqrt{\frac{P}{H_{cp}}} \qquad (45)$$

Como H_{cp} es desconocida mientras no se determinen e y $\frac{l}{e}$, sería preciso ir tanteando y comprobando por medio del cuadro (44), hasta obtener un e tal que la presión admisible por pandeo, H_{cp}, fuera igual ó algo inferior á la supuesta. Un sencillo artificio evita esos tanteos. Puesto que

$$P = 1{,}097\ H_{cp} \times e^2,$$

$$\frac{P}{l^2} = 1{,}097\ H_{cp} \times \frac{e^2}{l^2}, \quad \text{ó:} \quad H_{cp} \times \frac{e^2}{l^2} = 0{,}91 \frac{P}{l^2}.$$

En el cuadro (44) figuran en las dos últimas columnas los valores de $H_{cp} \times \frac{e^2}{l^2}$ para los hormigones de 300 y 400 kilogramos por metro cúbico y para todos los valores usuales de $\frac{l}{e}$. Basta calcular $0{,}91 \frac{P}{l^2}$ (ó en general $\frac{1}{(1+r'q')(1+r''q'')}$ $\times \frac{P}{l^2}$) y buscar, por interpolación, si es preciso, un número



$H_{cp}\,\frac{e^2}{l^2}$ igual; le corresponderán, directamente, ó interpolando, un valor de H_{cp} y otro de $\frac{l}{e}$, que serán los estrictamente aplicables.

El cuadro se refiere á $k = 1$, es decir, á piezas articuladas en sus extremos. Para aplicarlo á cualquier otro caso, basta efectuar el cálculo para una longitud *virtual*, (fig. 29), obtenida multiplicando la real por $\sqrt{\frac{1}{k}}$, puesto que para una misma presión crítica, $k\,\pi^2\,\frac{EI}{l^2}$, l varía como $\sqrt{\frac{1}{k}}$. Así, para:

Figura 29.

Un extremo libre, otro empotrado, $k = \frac{1}{4}$, $l_v = 2\,l$.

Los dos extremos articulados, $k = 1$, $l_v = l$.

Un extremo empotrado, otro guiado, $k = 2$, $l_v = \frac{l}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,l$.

Los dos extremos empotrados, $k = 4$, $l_v = 0{,}50\,l$.

Ejemplo: Pilar de 10 metros de altura, empotrado en la base, guiado en la coronación y cargado con 100 toneladas.

Tomaremos, en general, como unidades el centímetro y el kilogramo. La longitud virtual será 707 centímetros, y su cuadrado 500.000. El número $0{,}91\,\frac{P}{l_v{}^2}$ es 0,182. Si empleamos hormigón de 300 kilogramos por metro cúbico, la esbeltez 14 y la carga 36,2 kilogramos por centímetro cuadrado, corresponden, exactamente casi, con 0,182. Si el hormigón es de 400 kilogramos por metro cúbico, la interpolación da $\frac{l}{e} = 15{,}50$, y $H_{cp} = 43{,}3$ kilogramos por centímetro cuadrado.



Resultan así respectivamente:

e	$= 50$ cm.	e	$= 46$ cm.
e^2	$= 2.500$ cm².	e^2	$= 2.116$ cm².
α'	$= 12{,}50$ cm².	α'	$= 10{,}58$ cm².
d	$\leq 2{,}5$ cm.	d	$\leq 2{,}3$ cm.
4	● de $2{,}0 = 12{,}56$ cm².	4	● de $1{,}8 = 10{,}20$ cm².
α''	$= 0{,}28$ cm².	α''	$= 0{,}23$ cm.²
1	● de $0{,}6 = 0{,}28$. cm².	1	● de $0{,}55 = 0{,}24$ cm².
s	$= 16{,}7$ cm.	s	$= 15{,}3$ cm.
m	$= 6$ cercos en m. l.	m	$= 6{,}5$ cercos en m. l.
$\frac{P}{h}$	$= 40{,}0$ kg./cm².	$\frac{P}{h}$	$= 47{,}2$ kg./cm².
H	$= 36{,}4$ »	H	$= 42{,}9$ »
A	$= 582$ »	A	$= 686$ »
V	$= 0{,}2500$ m³. por m. l.	V	$= 0{,}2116$ m³. por m. l.
v	$= 0{,}0015$ »	v	$= 0{,}0013$ »
p	$= 12{,}0$ kg. »	p	$= 10{,}4$ kg. »

Los valores H y siguientes están deducidos suponiendo $q' = 0{,}005$ y $q'' = 0{,}001$, porque las secciones calculadas coinciden prácticamente con las correspondientes á las barras y alambre escogidos. Muchas veces, por no tener en una obra demasiados tipos de barras, hay que adoptar secciones efectivas mayores que α' y α''; si se quiere apurar la exactitud, hay que calcular las q' y q'' que efectivamente resulten y el factor de amplificación $(1 + r'q')\ (1 + r''q'')$. v y p se refieren al total de armaduras en un metro lineal. La disminución de V y de p, empleando el hormigón de 400 kilogramos por metro cúbico, compensa con creces el aumento de coste debido á la mayor riqueza en cemento. A 80 pesetas la tonelada de éste y con los precios ya indicados, de 100 y 0,40, el metro lineal de pilar cuesta 29,80 y 27,01 pesetas. Conviene, económicamente, el hormigón de más resistencia, con el mínimo de armaduras.

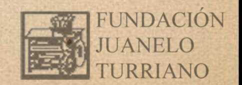


Solamente cuando circunstancias especiales exijan reducir todo lo posible las dimensiones de un pilar, ó cuando antes de sufrir compresión esté la pieza expuesta á trabajar por flexión, un pilote, por ejemplo, convendrá forzar las cuantías. Entonces precisa limitar la carga aparente $\frac{P}{h}$ á 0,60 H_{rc}, ó, lo que es igual, la amplificación $(1 + r'q') \times (1 + r''q'')$ á $\frac{0,60}{0,28} = 2,14$, para que el hormigón exterior á los cercos, y que no está protegido por ellos, no se fisure. Pero es muy raro llegar á $q' = 0,04$ y $q'' = 0,01$, que dan una amplificación, al máximo, de 1,90.

Un pilar de hormigón armado, entre dos suelos con nervios cruzados, está teóricamente en el caso de doble empotramiento ($k = 4$); si en uno de aquéllos hay un solo orden de nervios, en el tercero ($k = 2$); si en los dos hay nervios en un solo sentido en el segundo ($k = 1$) y si está sentado sobre una basa y con una sola fila de nervios en la coronación en el primero $\left(k = \frac{1}{4}\right)$.

Todo lo dicho supone la presión exactamente aplicada según el eje. En las obras no hay esa exactitud, y es prudente precaverse contra las desigualdades de peso y de sobrecarga, particularmente de ésta, rebajando la presión admisible á 0,80, 0,70, 0,60 de la calculada, según que la pieza esté bajo nervios simétricos, en línea de fachada, ó en ángulo de ésta; ó, lo que es igual, mayorar la presión total á 1,25, 1,43, 1,67, ó $\frac{5}{4}$, $\frac{10}{7}$, $\frac{5}{3}$, de la real, números adoptados por la Comisión francesa que experimentó, al efecto, numerosas piezas.

La fórmula de Rankine, recomendada por dicha Comisión:



$$H_{cp} = \frac{0,28 \, H_{rc}}{1 + \frac{c}{10.000} \, \frac{l^2}{\rho^2}}$$

en la que c vale en los cuatro casos, 4, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, resulta idéntica á la que directamente hemos deducido, partiendo de la de Euler,

$$H_{cp} = \frac{0,28 \, H_{rc}}{1 + \frac{1}{10.000 \, k} \, \frac{l^2}{\rho^2}} \qquad (36)$$

con los coeficientes k, $\frac{1}{4}$, 1, 2, 4, es decir, $k = \frac{1}{c}$. Llegamos, por tanto, á lo establecido experimentalmente, de perfecto acuerdo la práctica con la teoría. Comprobación de lo antes afirmado. La fórmula de Euler es exacta siempre que el valor de E, que en ella interviene, sea precisamente el relativo á la carga crítica de iniciación del pandeo.

Cuando la excentricidad pueda tener un valor apreciable, la pieza está sujeta á flexión compuesta, y como tal hay que calcularla. Aplicar lo aquí expuesto, constituiría un *grave error*.

III

Tracción uniforme.

Al considerar $H_{rt} = O$, la armadura sola ha de resistir, y por tanto, $T = A \, \alpha$.

El hormigón sólo interviene, así planteado el problema, como envolvente, para evitar la herrumbre de las armaduras.

Pero en realidad trabaja por tracción, y alivia algo á la armadura mientras, ó donde, no existen fisuras. Importa evitar que éstas se produzcan.



Para $A = 1.200$ kilogramos por centímetro cuadrado, el alargamiento unitario de la armadura es:

$$\frac{1.200}{2.250.000} = 0{,}000\,533...$$

que el hormigón debe sufrir igualmente, á menos de fisurarse.

Pero, por pequeña que sea H_t, la parte total del esfuerzo T soportada realmente por el hormigón puede llegar á ser importante, tanto más, cuanto mayor sea su sección $h = \frac{\alpha}{q}$, ó cuanto más pequeño sea q.

Si admitimos que el hormigón, *ya fatigado por la retracción,* tiene en las condiciones de trabajo un E_h 10 veces menor que el medio adoptado, de 150.000, r será 150.

Calculada α por la condición de que su carga aparente sea 1.200 kilogramos por centímetro cuadrado, tendremos:

$$H\,(1 + 150\,q)\,h = T = 1.200\,qh. \qquad (46)$$

$$H = \frac{1.200\,q}{1 + 150\,q} \qquad (47)$$

para

$$\left.\begin{array}{llllll} q & = 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}03 & 0{,}04 & 0{,}05 \\ H & = 4{,}8 & 6 & 6{,}54 & 6{,}85 & 7{,}05 \\ A & = 720 & 900 & 981 & 1.027 & 1.058 \end{array}\right\} \qquad (48)$$

Conviene que H no alcance mucho valor, para aminorar las probabilidades de fisuración, puesto que las cargas H vienen á sumarse á las preexistentes, debidas al fraguado y desecación: prácticamente el límite de q debe ser, á lo sumo, 0,04 ó la sección de hormigón 25 veces, por lo menos, la de la armadura.

Para el promedio, 0,02, el alargamiento unitario de α es:

$$\frac{900}{2.250.000} = 0{,}000\,4.$$



Para que el hormigón lo sufra igual, precisa que

$$0{,}000\,4 = \frac{6}{E_h}; \; E_h = \frac{6}{0{,}000\,4} = 15.000,$$

como habíamos admitido.

Para $q = 0{,}04$, análogamente

$$\lambda = \frac{2.250.000}{1.027} = 0{,}000\,456$$

$$E_h = \frac{6{,}85}{0{,}000\,456} = 15.000.$$

En realidad, la disminución de E_h no llega á tanto, por el solo hecho de alcanzar tracciones de 6 á 7 kilogramos por centímetro cuadrado; pero es prudente admitirla, por la disminución previa causada por la retracción de fraguado.

Prácticamente calcularemos α por la condición *aparente:* $T = 1.200\,\alpha$, (48), y, según las conveniencias del problema, haremos h, 25, 33, 50, hasta 100 veces, mayor que α; ($q = 0{,}04$, 0,03, 0,02, 0;01) y, como promedio preferible, 50, ($q = 0{,}02$).

Ejemplo.—Sifón de Albelda: diámetro, 4 metros; carga, 30 metros en el eje, 32 en la parte inferior.

$$32.000 \text{ kg./m}^2 \times 4 \text{ m}^2 = 128.000 \text{ kg.} = 2\;T$$

$$\alpha = \left(\dot{T} \text{ de } \frac{5{,}0 \times 5{,}0}{0{,}6}; \; 5{,}76 \text{ cm}^2\right) \times \frac{100}{9{,}3} = 61{,}9 \text{ cm}^2$$

(La separación mínima es 9,3 centímetros.)

$$\text{Carga aparente} = \frac{128.000}{2 \times 61{,}9} = 1.034 \text{ kg./cm}^2.$$

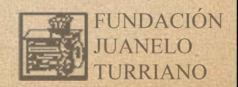
$$h = 20 \times 100 = 2.000 \text{ cm}^2; \; q = 0{,}0309$$

$$H = \frac{64.000}{2.000\,(1 + 4{,}635)} = \frac{64.000}{11.270} = 5{,}67 \text{ kg./cm}^2.$$

$$A = 150 \times 5{,}67 = 851 \text{ kg./cm}^2.$$



En realidad, las cargas son mayores, por existir en el tubo no una tracción uniforme, sino una flexión compuesta, debida al peso propio del tubo y á las reacciones de las camas. El cálculo exacto debe hacerse, como más adelante veremos, teniendo en cuenta el régimen de tracción y flexión.



CAPÍTULO IV

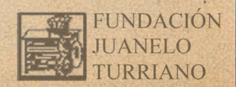
FLEXIÓN SENCILLA

I

Estudio experimental.

Una pieza prismática, sometida á la única acción de un par de fuerzas, situado en su plano longitudinal de simetría, sufre exclusivamente cargas moleculares paralelas á aquél, iguales dentro de cada línea normal al plano del par y variables desde un máximo positivo hasta otro negativo, según dichas líneas se mueven desde la fibra más alta á la más baja de una sección de la pieza, hecha por un plano también normal al del par.

Las deformaciones están análogamente distribuídas: hay una línea de fibras, con carga molecular y deformación nulas; á uno y otro lado de esa línea, cargas y deformaciones van creciendo con uno y otro signo hasta los extremos de la sección de la pieza. En virtud de la simetría respecto al plano longitudinal que contiene el par, basta estudiar las variaciones dentro de ese plano: la sección de la pieza, normal á él, es la recta ss' (fig. 30); la línea de cargas y deformaciones nulas se proyecta en *O, fibra neutra,* y la línea $\Delta O \Delta'$ representa la distribución de las deformaciones, es decir, la posición y figura que la recta ss' toma por efecto de la flexión.



Si el material de la pieza obedece á la ley de Hooke, $\Delta O \Delta'$ representa también, en una escala E veces menor, la distribución de cargas, $H = E\Delta$. Si el coeficiente, E, es varia-

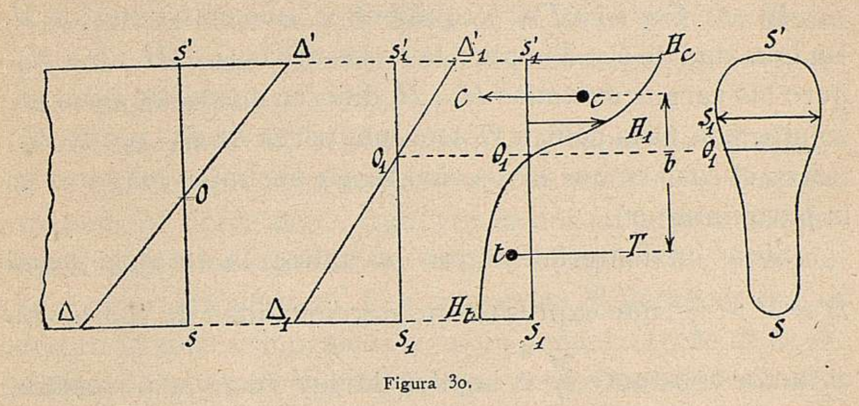


Figura 30.

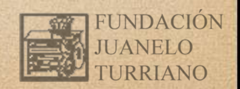
ble, la línea de cargas es completamente distinta, $H_c\ O_1\ H_t$.

La hipótesis de Bernouilli, más conocida por el postulado de Navier, consiste en suponer recta la línea $\Delta O \Delta'$: la sección plana se conserva plana durante la deformación.

En los materiales sujetos á la ley de Hooke y sometidos á flexión sencilla, se verifica esa distribución lineal, siempre que no haya bruscos cambios de anchura en la sección de la pieza. La carga de una fibra es proporcional á su brazo de palanca respecto á la fibra neutra.

En los materiales pétreos se realiza también de un modo *suficientemente exacto* la conservación de las secciones planas. Pero la variabilidad de E_h hace que las cargas disten de ser proporcionales al brazo de palanca respecto á O.

El equilibrio resulta de la igualdad en valor absoluto de las resultantes C y T, aplicadas, en general, al centro de gravedad de los sólidos que tuvieran por base las áreas parciales O_1S, O_1S' de la sección de la pieza y por altura, en cada horizontal S_1, la carga correspondiente H_1. Cuando la



sección es rectangular, los sólidos son prismas de sección recta $O_1s'_1H_c$, $O_1s_1H_t$, y las resultantes pasan por los centros de gravedad c, t, de aquéllas.

El par $C \times b = T \times b$ equilibra al momento exterior M. La igualdad de C y T implica la de las áreas $O_1s'_1H_c$, $O_1s_1H_t$; pero las cargas máximas H_c, H_t difieren mucho en valor absoluto, y la fibra neutra O_1 está más cerca de H_c que de H_t (salvo el caso en que la sección tenga anchuras mayores en la parte inferior).

Si á un material pétreo se aplica la fórmula usual $H = M \times \frac{v}{I}$, que expresa la proporcionalidad de H á v, con el factor constante $\frac{M}{I}$ é implica la ley rectilínea, resulta, para una sección rectangular, $H_c = H_t$ y distintos ambos de sus valores reales.

Armemos asimétricamente esa pieza y sometámosla á pares M, cada vez mayores (fig. 31). Se conocen E_a y la ley

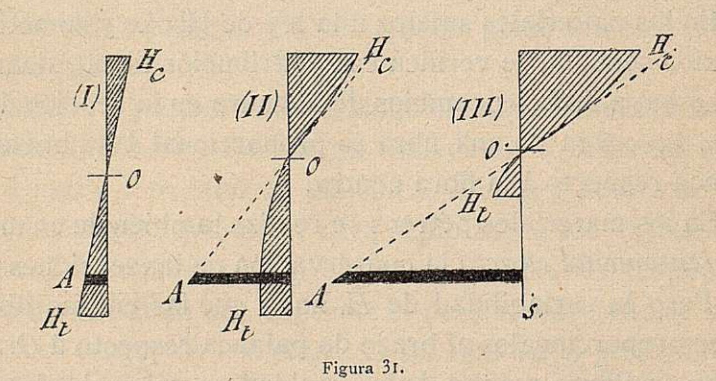


Figura 31.

de variación de E_h; medidas en cada estado de carga las deformaciones de la armadura y del hormigón en distintos puntos de una sección, se construyen con exactitud las líneas



de distribución de las cargas H y A, representando estas últimas en una escala r veces menor que aquéllas.

Bajo un momento muy moderado, los distintos valores de E_h apenas difieren, y la línea de H_c H_t es prácticamente una recta. En esta primera fase, (I), las cargas H_c, H_t, A, son pequeñísimas.

Al aumentar M, (II), H_c crece con rapidez, según una curva que se aproxima bastante á una recta OA; H_t crece, rápidamente cerca de O, cada vez menos en puntos más distantes, y su línea representativa concluye por acercarse mucho á una recta vertical. Los valores de E_h decrecen poco á poco en la zona comprimida y en un pequeño trozo de la extendida, para seguir en ésta disminuyendo con rapidez, hasta *casi anularse* en las fibras algo más tensas y permanecer constante, con un valor pequeñísimo, *prácticamente nulo*, hasta la última fibra. El hormigón se deforma plásticamente, como hemos visto, con alargamientos *variables* sin desarrollar más que reacciones moleculares *constantes*.

La carga A crece y su magnitud representativa corresponde con el segmento limitado por la recta OA, á la que se aproxima mucho la línea OH_c.

Si M continúa creciendo, persiste la misma fase, (II), mientras los alargamientos de la armadura no llegan al máximo que plásticamente puede alcanzar el hormigón que la rodea. El equilibrio se establece siempre, como en la figura 30, entre la resultante, C, de las H_c, de una parte, y de otra, la suma de la tracción T_a desarrollada por la armadura y la resultante T_h de todas las H_t. Esta última permanece prácticamente invariable durante ese período, mientras que T_a y C siguen creciendo á la par que M.

Un nuevo incremento de M determina un alargamiento de la armadura, superior al plásticamente soportable por el



hormigón, que se rompe, (fig. 31), en una parte de Os, (III). El equilibrio se establece entre C y la suma de T_a con la pequeña resultante de las H_t del hormigón no roto. Las H_c dibujan una curva que, como en la fase (II), se confunde casi con la recta OA.

El paso de (II) á (III) depende, á igualdad de los demás elementos, de la cuantía q. Si ésta es pequeña, la tracción T_a, desarrollada por la armadura, es de valor comparable con la resultante, T_h, de las H_t; si q es grande, T_h resulta bastante pequeña comparada con T_a. Los incrementos de T_a son, á igualdad de incrementos de M, y desde que T_h queda estacionaria, grandes en aquel caso, menores en éste. Los alargamientos que provocan la rotura del hormigón se producen, pues, más pronto cuanto menor es q.

Dentro de la fase (III) el crecimiento de M determina alargamientos cada vez mayores de la armadura, y avance de la zona de hormigón, ya roto, hacia O. Si q es pequeña, se alcanza pronto el límite elástico de la armadura, y su deslizamiento respecto al hormigón; la rotura de la pieza sobreviene después, cuando la parte inferior se disgrega verticalmente según las fisuras, y horizontalmente á lo largo de las barras.

Si q es grande, C y T_a crecen á compás, alcanzándose la carga de rotura, H_{rc}, del hormigón, antes que la límite elástica de la armadura. La pieza se rompe por desmoronamiento de las fibras comprimidas.

Ante la incertidumbre de la duración de la fase (II), que es la que lógicamente debiera servir de base de cálculo, puesto que dentro de ella se saca todo el partido posible de la resistencia del hormigón, sin que llegue á fisurarse, adoptamos, como universalmente se hace, el principio de prescindir *en absoluto* del concurso prestado por T_h. Esto equivale



á suponer *anticipadamente roto* el hormigón, como al iniciarse la fase (III), y suponerlo roto en toda la zona *Os,* á lo que nunca se llega. Y, sin embargo, los valores máximos de H_c y A no exceden de los correspondientes á (II), es decir, no se producen alargamientos que comprometan la integridad del hormigón.

En resumen, la fase tipo, fundamento del cálculo es, una virtual, (φ), idéntica á la (II), salvo prescindir en absoluta del área de tensiones, T_h. Dentro de esta fase, las variaciones de H_c, respecto á las dadas por la ley lineal $O\,A$, son prácticamente despreciables y, como veremos, el error resultante conduce á valores calculados algo mayores que los reales.

Esto, unido al desprecio de T_h, cuyo valor no deja de ser una fracción apreciable de T, implica una mayoración efectiva del coeficiente de seguridad. Pero la ventaja mayor de suponer $H_t = O$, es la de tener en cuenta los defectos de construcción y la posible existencia de fisuras por retracción de fraguado y secado.

Cuando la armadura es disimétrica ó simétrica, las barras altas sufren presiones, A', muy moderadas, r veces mayores que las H_c correspondientes. El equilibrio se establece entre la resultante, C_h, de las H_c, compuesta con C_a, compresión desarrollada por aquéllas, y de otra parte, según la fase, (φ), admitida, la tracción T_a, únicamente. El alivio prestado por las barras comprimidas aminora el área total y el máximo valor de las H_c, aunque, como hemos visto al estudiar la compresión uniforme, no sea económicamente eficaz, y sí solo un recurso para reducir el máximo de H_c al límite admisible.

Tenemos, en resumen, que la recta $O\,A$ (fig. 32), trazada por la fibra neutra, representará: por sus abscisas A y A',



en una cierta escala, las cargas de las armaduras de tensión y de compresión, si la hay; por sus abscisas H_c, las cargas del hormigón, que, dentro de los límites usuales y, sobre todo, después de cierto número de reiteraciones que

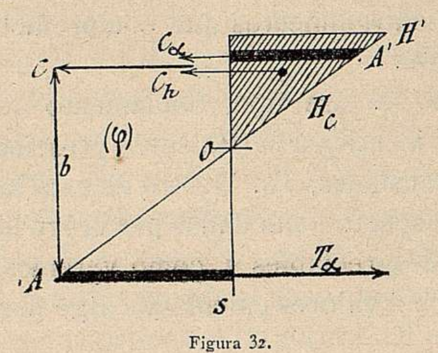


Figura 32.

hayan hecho *prácticamente* aplicable al hormigón la ley de Hooke, son, con pequeño error y favorable á la seguridad, las correspondientes á esa ley rectilínea, salvo un factor de reducción $\frac{1}{r}$, ó, lo que es igual, están representadas en escala r veces mayor que las A.

Las relaciones entre A, A' y el máximo de H_c, que designaremos siempre por H', son puramente geométricas: sólo dependen de la posición de la fibra neutra, O, y del factor de reducción, r.

A su vez la posición de O sólo depende del equilibrio entre los pares $C\,b = T\,b$ y M, y, en suma, de la igualdad de los volúmenes representativos de C y de T, que en el caso corriente, de pieza de sección rectangular, es la igualdad de las áreas representativas de $C = (C_h + C_\alpha)$ y T_α, dentro siempre de la fase admitida (φ).

El cálculo se reduce, por tanto, á la más sencilla Geometría, ó, si se quiere, Mecánica: la igualdad de momentos de los volúmenes ó áreas representativas de compresiones



y tracciones, determina la fibra neutra y al mismo tiempo el valor, hasta entonces desconocido, de aquéllos (puesto que es la fibra neutra quien los delimita) y el brazo de palanca, b, entre sus centros de acción; la proporcionalidad de H', A y A', conocido r, determina sus respectivos valores, con tal de que $C\,b = T\,b = M$.

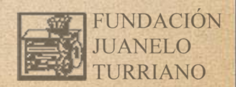
Todo estriba, en suma, en el conocimiento de r. Teóricamente tiene una definición precisa, $\frac{E_a}{E_h}$. E_a es perfectamente conocido y constante en el acero dulce usual. E_h es, como hemos visto, sumamente variable con diversas influencias, unas sistemáticas, y, lo que es peor, otras accidentales, imposibles de tener en cuenta. Precisa adoptar un valor de r, que corresponda lo más exactamente posible con las condiciones usuales, y para el que aquéllas influencias sólo se traduzcan en errores pequeños y, sobre todo, favorables á la seguridad.

Esta determinación de r tiene que ser puramente experimental, y se ha hecho prolija y repetidamente sobre piezas sometidas á momento constante y esfuerzos transversales nulos, bajo la acción de dos fuerzas iguales y simétricamente dispuestas.

Resumiremos el detallado estudio hecho por el Profesor Mörsch, al igual de otros muchos Ingenieros y Comisiones de estudio.

Medidas directa y escrupulosamente las deformaciones unitarias, y comprobada la *sensible exactitud* de la conservación plana de las secciones, la unión de puntos homólogos da, para cada valor de M, la posición de la fibra neutra O, que se representa en la figura 33, para tres piezas, idénticas salvo las cuantías, respectivamente de 0,004, 0,010 y 0,019.

Lo primero que se observa es que á cada valor de M



corresponde una fibra neutra, tanto más alta cuanto mayor es aquél. Esto se explica lógicamente; en la realidad, el área variable, ΣH_t, equilibra á la diferencia $(\Sigma H_c - T_\alpha)$;

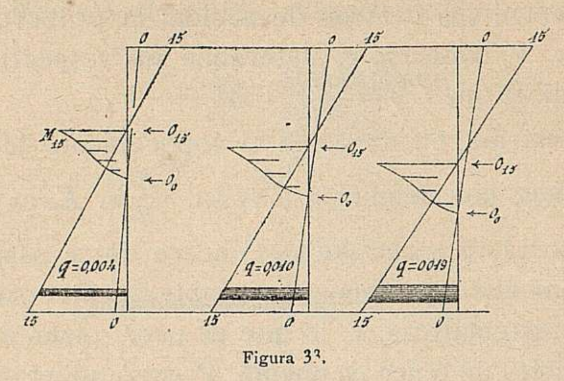


Figura 33.

como T_α y el máximo de H_c crecen casi á compás, el triángulo curvilíneo ΣH_c debe ir disminuyendo de altura para acomodarse al lento crecimiento del área ΣH_t.

Trazando en cada punto O una abscisa que represente el momento á que corresponde la fibra neutra así deducida, se obtiene una curva de error, M_{15}, cuya prolongación hasta la sección da la *fibra neutra inicial*, O_0, la que correspondería á un momento sumamente pequeño. Esta fibra neutra inicial es tanto más baja cuanto mayor es q, cosa perfectamente lógica; viene á coincidir bastante bien con la calculada, según la Instrucción suiza, para $r = 20$.

Pero este valor sólo corresponde á un estado inicial, de cortísima extensión, durante el que, por la pequeñez de las cargas, el hormigón armado cumple la ley de Hooke, fase (I). Á poco que M aumente, se entra en la fase (II) y O se va elevando.

Bajo momentos considerables, siempre que no se produzcan fisuras, la fibra neutra se aproxima mucho, cualquiera que sea q, á la calculada con $r = 15$ sobre la hipóte-



sis de la fase (φ). La fase *real* es la (II), puesto que el hormigón se conserva íntegro.

La distribución de cargas durante toda la fase (II) hasta iniciarse las fisuras y entrar en la (III) ha sido estudiada minuciosamente, en las mismas piezas.

Medidas directamente las deformaciones en toda la zona comprimida y parte de la extendida del hormigón, así como las de la armadura, y conocidas experimentalmente la ley de variación de E_h, así como E_a, se han podido trazar las líneas de distribución de cargas, para diversas cuantías, y en cada una para distintos momentos. La figura 34 las representa en tres estados bastante distintos, para que resalte la marcha del fenómeno; corresponden á piezas de cuantía 0,010.

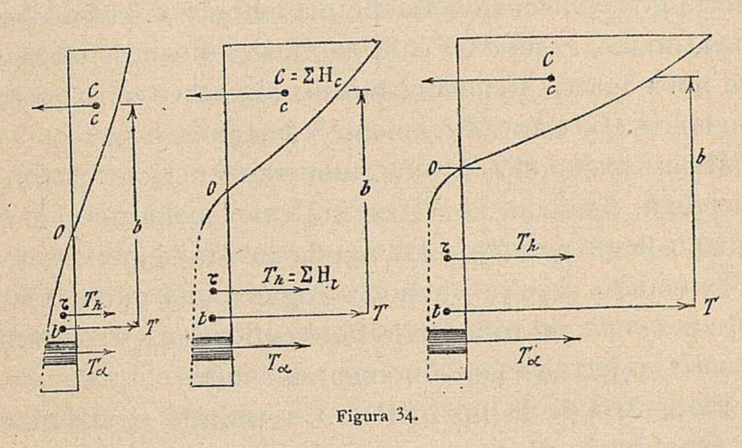


Figura 34.

Se conocen: T_a, directamente; C, por medida del área ΣH_c y se deduce $T_h = C - T_a$. El brazo de palanca debe ser $\frac{M}{C} = b$; calculado el centro de gravedad, c, del área ΣH_c, se deduce la posición del centro de acción, t, de la tensión total, resultante de T_a y ΣH_t.



No siendo posible calcular con exactitud las cargas en gran parte de la zona extendida, las limitadas con línea de puntos han sido racionalmente deducidas con arreglo á estas condiciones: 1.ª Limitar un área equivalente á $T_h = C - T_a$. 2.ª Tener su centro de gravedad á la distancia $\frac{\beta \times T}{T_h}$ de la armadura, puesto que T ha de ser resultante de T_a y T_h 3.ª Limitar su abscisa máxima, H'_t á la carga de rotura del mismo hormigón, directamente medida, H_{rt}.

Como se ve, el centro de gravedad de las compresiones, c, va subiendo lentamente; el de tensiones desarrolladas por el hormigón, τ, asciende mucho más de prisa; y el de las tensiones totales, t, sube en cantidad insignificante. El ascenso de la fibra neutra es casi el mismo del centro, τ, y el brazo de palanca $O\,\tau$ es prácticamente constante.

Mientras que el área $\Sigma\, H_c$ aumenta en gran escala, excediendo al final de 3,5 veces su valor primitivo, el área ΣH_t sólo llega á doblar. La ayuda prestada por el hormigón extendido resulta, como es lógico, una parte relativamente pequeña del total, bajo fuertes flexiones y, en cambio, bastante importante bajo momentos débiles.

Ya dentro de la fase (III), el hormigón se fisura, pero sólo en algunos planos; y, aun después de aparecidas las primeras grietas, continúa la tensión total del hormigón creciendo, lentamente, en los trozos que conservan su continuidad. En el plano de una fisura, T_h, es prácticamente nula; (en realidad, la fisura no alcanza á la fibra neutra, y T_h conserva un pequeño valor); T_a tiene que ser en ese plano mayor que en los anteriores y posteriores, puesto que ella sola debe equilibrar á C. La variación de valores de T_a hace entrar en juego la adherencia, y, en efecto, basta una corta distancia para que á partir de ella de nuevo coopere el hor-



migón intacto, desarrollando su T_h, como antes de agrietarse. El punto O de la armadura, (fig. 35), en el mismo plano que los O' del hormigón antes de fisurarse, queda en el cen-

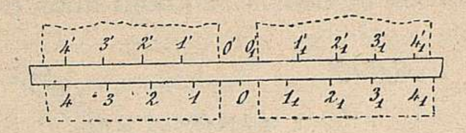


Figura 35.

tro de la grieta: $O' O'_1$ diferencia de alargamientos finales en ésta, mide el deslizamiento total de la armadura entre los planos $4\ 4_1$, donde la adherencia vuelve á impedirlo; y los deslizamientos $1'\ 1'_1 - 1\ 1_1$, $2'\ 2'_1 - 2\ 2_1$, $3'\ 3'_1 - 3\ 3_1$, medidos entre los planos 1, 2, 3, antes coincidentes, son cada vez menores, hasta anularse para $4'\ 4'_1 - 4\ 4_1 = O$. Desde los planos 4 hasta otros análogos, cercanos á otra grieta, el trabajo continúa siendo el de la fase (II); el momento resistente sigue aumentando, sin que las deformaciones totales, flechas de la pieza, pierdan la regularidad de su crecimiento. Y es preciso que la tensión de las armaduras se acerque á su carga límite elástica para que, ya con muchas más grietas y más próximas, desaparezca totalmente la ayuda prestada por el hormigón extendido.

Esto demuestra una vez más la conveniencia de aceptar como base del cálculo la fase virtual, (φ), que participa de las (II) y (III), suponiendo anticipadamente nula T_h.

La figura 36 resume la experimentación de una pieza, de cuantía 0,010, sujeta á flexión sencilla. Para cada abscisa, momento de flexión en centímetros-kilogramos, hay dos grupos de ordenadas, que miden los valores de las máximas cargas, H', compresiones unitarias del hormigón, y A, tensiones de la armadura, en kilogramos por centímetro cua-



drado; las unas, medidas directamente; las otras, calculadas sobre la base (φ), con $r = 15$, como inmediatamente detallaremos.

Mientras H' es inferior á 56 kilogramos por centímetro

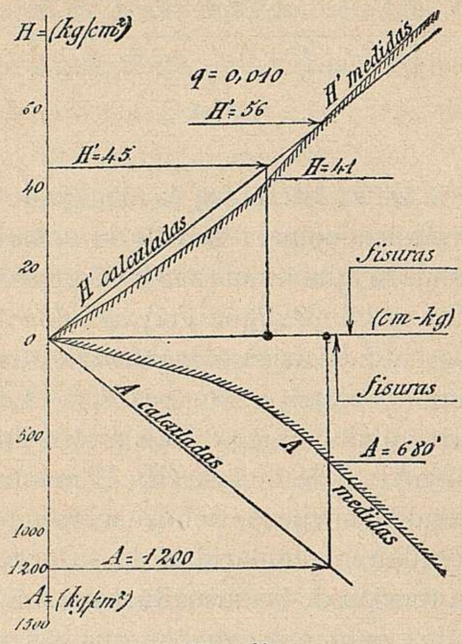
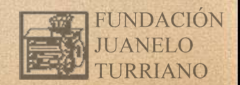


Figura 36.

cuadrado, el error es siempre favorable y de un 8 á 10 por 100, dentro de las cargas usuales entre 30 y 45. El error en las cargas de la armadura es mucho mayor, casi de 50 por 100, pero también favorable. Así, para los límites máximos 45 y 1.200 kilogramos por centímetro cuadrado, los valores reales son 41 y 680.

Para cuantías escasas, alrededor de 0,004, los errores son aún mayores, particularmente respecto á A; para cuantías fuertes, sobre 0,020, el error en las H' es casi nulo, y en las A, menor que en el caso medio.



Más adelante estudiaremos la razón de no coincidir para un mismo momento los límites prácticos, 45 y 1.200, así como la aparición de las primeras fisuras.

La adopción de $r = 20$ da errores más grandes aún respecto á A, favorables, y mayores también respecto á H', y, lo que es peor, desfavorables.

Parece que debiera tomarse r menor que 15, para conseguir mayor aproximación del cálculo á la realidad, y hasta hacerlo variable en el mismo sentido que q, á costa de una complicación tan grande como poco útil. Así se hace en los reglamentos del Estado de Nueva York ($r = 12$) é italiano ($r = 10$), mientras que en la mayor parte de las naciones, y á la cabeza de ellas, Alemania, Francia y Austria, las tres que de más antiguo vienen construyendo y estudiando, se ha establecido $r = 15$.

Un valor alto de r implica una exageración de las deformaciones de la armadura, que aparece más cargada que lo están en realidad, mientras que sucede á la inversa con el hormigón. La hipótesis $H_{rt} = O$, implica, por lo contrario, una mayoración ficticia de las cargas del hormigón comprimido.

Los valores absolutos de los dos errores cometidos estableciendo $r = 15$ y $H_{rt} = o$ varían en el mismo sentido, es decir, son mayores ambos en los forjados y piezas poco peraltadas y menores en las tes y piezas más rígidas.

En uno y otro caso, como la experimentación demuestra, ambos errores se compensan, por lo menos en lo relativo á H', que es lo más interesante, y que para $r = 15$ concuerda sensiblemente, aunque siempre con error favorable, con la carga real. Para A el error, también favorable, es bastante mayor, sobre todo con pequeñas q.

Lo más lógico sería hacer variar r con q, en el mismo



sentido; pero complicaría muchísimo, sin más utilidad práctica que poder escatimar algo las dimensiones.

II

Ecuaciones generales.

Sea una pieza (fig. 37) *(a)*, rectangular, de ancho a y altura ó *peralto* p, armada disimétricamente, en general, con dos órdenes de barras, de secciones totales α, α'.

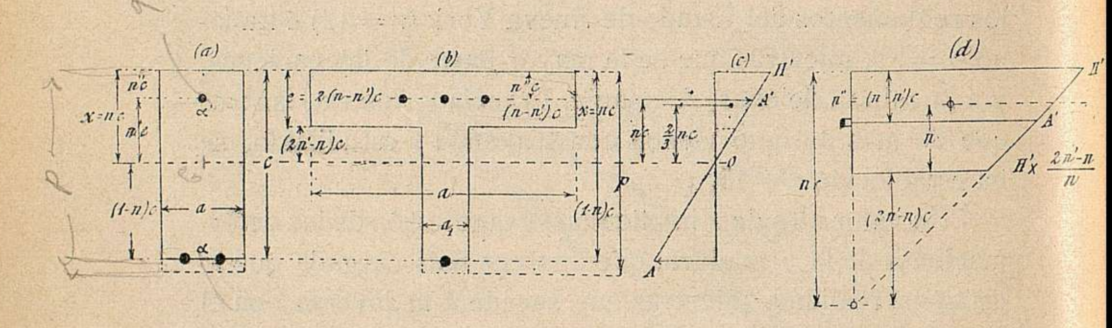


Figura 37.

Adoptada la fase (φ), hemos de prescindir del hormigón extendido en toda la zona inferior á la fibra neutra. Del peralto, p, sólo nos servirá para el cálculo la distancia c, *canto* ó altura *útil*, que separa la armadura inferior, α, de la fibra superior. La altura, $p - c$, sólo interviene como envolvente protectora de las barras, y consideraremos como *sección eficaz* de la pieza el área $ac = h$, refiriendo á ella las cuantías $q = \frac{\alpha}{h}$, $q' = \frac{\alpha'}{h}$.

Sea $x = nc$, $(n < 1)$, la fracción del canto útil, que mide la profundidad de la fibra neutra bajo la superior, y $n''c$, $(n'' < 1)$ la fracción análoga respecto á la armadura su-



perior α'; conviene, además, definir su altura sobre la fibra media, $n'c = nc - n''c$, por la fracción $n' = n - n'' < 1$.

La figura 37 *(c)* representa la fase (φ): H' es la carga máxima del hormigón; A y A' son las cargas de las armaduras, en escala r veces menor, ó aplicables, midiéndolas en la misma escala, á secciones amplificadas r veces.

La resultante de las compresiones del hormigón, C_h, es: $a \times nc \times \frac{H'}{2}$ y su brazo de palanca respecto á O, $\frac{2}{3} nc$.

La compresión de la armadura superior, C_α, es: $r\alpha' \times A' = r\alpha' \times H' \times \frac{n'c}{nc}$, y su brazo respecto á O, $n'c$.

La tensión, T_α, de la armadura inferior es: $r\alpha \times A = r\alpha \times H' \times \frac{(1-n)c}{nc}$ y su brazo $(1-n)c$.

La condición fundamental de la flexión sencilla es: $C_h + C_{\alpha'} = T_\alpha$ (en valor absoluto), luego sustituyendo α' por $q'ac$, α por qac, y simplificando:

$$\left.\begin{aligned} n^2 + 2r(q+q')\,n - 2rq - 2rq'n'' = 0 \\ q = \frac{n^2 + 2rq'n - 2rq'n''}{2r(1-n)} \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

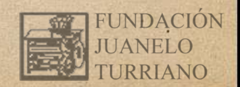
ecuaciones en las que sólo intervienen los números abstractos, (magnitud cero), r, n, q, q', n'', que expresan relaciones entre cantidades concretas de iguales magnitudes, dos á dos.

Lo mismo se obtendrá expresando que la fibra neutra pasa por el centro de gravedad de la sección virtual, equivalente á la heterogénea (α, α', anc), prescindiendo del área $a(1-n)c$ del hormigón extendido.

La incógnita principal es n, rebajamiento de la fibra neutra:

$$n = -r(q+q') + \sqrt{r^2(q+q')^2 + 2rq + 2rq'n''} \quad (50)$$

$n = -r[q + 0{,}89'] + \sqrt{r^2(q+0{,}8q)^2 + 2rq}$



puesto que de ella dependen: de aquí A

$$A = r\,\frac{1-n}{n}\,H' \quad (51)$$

< 1200 Kg

$$A' = r\,\frac{n'}{n}\,H' = r\,\frac{n-n''}{n}\,H' \quad (52)$$

De (51) se deduce otra expresión general de la profundidad de la fibra neutra:

$$n = \frac{r\,H'}{A + r\,H'} \quad (53)$$

La ecuación (51) demuestra que la relación $\frac{A}{H'}$, tiene un valor determinado para cada uno de n, es decir, para cada posición que ocupe la fibra neutra. Si se fija concretamente una carga máxima del hormigón, H', la de la armadura, A, será la que corresponda según (51) y no una arbitraria. Sólo se podrá imponer valores determinados á H' y A, con determinadas cuantías q, q', y elevación de la armadura superior, n', que se deducirán por eliminación de n entre (50) y (51). Por eso en el diagrama (fig. 36), al límite $H' = 45$ kilogramos por centímetro cuadrado no corresponde el $A = 1.200$, en la pieza asimétrica de cuantía 0,010.

La evaluación del momento resistente es bien sencilla. Por comodidad para el cálculo, aunque nuestras unidades sean el centímetro y el kilogramo, mediremos los momentos en metros-kilogramos, introduciendo, para restablecer la homogeneidad, el factor 100. Los coeficientes numéricos se simplifican, como se verá. Así tendremos:

$$(100\,M)\,(cm\text{-}kg.) = C_h \times \left(\frac{2}{3}nc + (1-n)\,c\right) + C_{a'} \times (n'c + (1-n)c)$$

$$= anc\,\frac{H'}{2} \times \frac{3-n}{3}\,c + rq'ac\,\frac{n}{n}\,H' \times (1 - n + n')\,c;$$



$$M\,(m\ kg.) = \frac{H'}{100}\,ac^2 \times \left[\frac{3n - n^2}{6} + rq'\,\frac{n' - nn' + n'^2}{n}\right] \qquad (54)$$

en función de la carga máxima, H'. Si se quiere con relación á la carga, A, basta eliminar H′ entre (51) y (54), obteniendo:

$$M\,(m\text{-}kg.) = \frac{A}{100}\,ac^2 \times \left[\frac{3n^2 - n^3}{6r - 6rn} + q'\,\frac{n' - nn' + n'^2}{1 - n}\right] \qquad (55)$$

O despejando H' y A:

$$H' = \frac{100\,M}{ac^2} \times \frac{1}{\dfrac{n(3-n)}{6} + rq'\,\dfrac{n' - nn' + n'^2}{n}} \qquad (56)$$

$$A = \frac{100\,M}{ac^2} \times \frac{1 - n}{\dfrac{n^2(3-n)}{6r} + q'\,(n' - nn' + n'^2)} \qquad (57)$$

En una comprobación, r, a, c, q, q', n'', M, son datos. La ecuación general, (50), da n, del que resulta $n' = n - n''$; (56) y (57) dan directamente H' y A, ó, más sencillamente, deducido H', por (56), las relaciones (51) y (52) dan A, A'.

Cuando la pieza degenera en asimétrica, por ser $q' = o$, las ecuaciones son:

$$n = -rq + \sqrt{r^2q^2 + 2rq} \qquad (58)$$

$$A = r\,\frac{1 - n}{n}\,H' \qquad (51)$$

$$H' = \frac{600\,M}{ac^2} \times \frac{1}{n(3 - n)} \qquad (59)$$

$$A = \frac{600\,M}{ac^2} \times \frac{r\,(1 - n)}{n^2(3 - n)} \qquad (60)$$



Y cuando se hace simétrica, $q = q'$:

$$n = -2rq + \sqrt{4r^2q^2 + 2rq(1 + n'')} \qquad (61)$$

$$A = r \frac{1-n}{n} H' \qquad (51)$$

$$A' = r \frac{n'}{n} H' = r \frac{n - n''}{n} H' \qquad (52)$$

$$H' = \frac{100\,M}{ac^2} \times \frac{1}{\frac{n(3-n)}{6} + rq \frac{n' - nn' + n'^2}{n}} \qquad (62)$$

$$A = \frac{100\,M}{ac^2} \times \frac{1-n}{\frac{n^2(3-n)}{6} + q(n' - nn' + n'^2)} \qquad (63)$$

Como se prescinde en absoluto del hormigón extendido, el cálculo es exactamente aplicable á una sección en T, siempre que el espesor del forjado sea igual ó mayor que la profundidad, nc, de la fibra neutra: a será el ancho total del forjado, y las cuantías q, q' se referirán al rectángulo virtual ó aparente, ac.

Pero, en general, estas piezas en T presentan forjados de espesor menor que nc, y la armadura superior, cuando existe, está en el plano medio de aquél.

Llamando (fig. 37) *(b)*, $n''c$ la profundidad de a', el espesor resulta $e = 2n''c = 2(n - n')c$, y la distancia del intradós á la fibra neutra es $n'c - (n - n')c = (2n' - n)c$.

La fibra neutra, ó el centro de gravedad, despreciando el hormigón comprimido entre el intradós y aquélla, por su pequeña altura y escasa anchura, a_1, están dados por:

$$n = \frac{rq - rq'n'' + 2n''^2}{rq + rq' + 2n''} \qquad (63)$$



Subsisten sin variación (51) y (52) y (53).

El área de compresiones se transforma (fig. 37) *(d)*, en un trapecio, de bases H' y $\frac{2n' - n}{n} H'$, cuyo centro de gravedad está elevado sobre el intradós:

$$\eta = \frac{2H' + \frac{2n' - n}{n} H'}{3H' + 3\frac{2n' - n}{n} H'} = \frac{n + 2n'}{6n'}$$

y el brazo de palanca entre C_h y T_a es:

$$\left(\frac{n + 2n'}{6n'} + 2n' - n + 1 - n\right) c = \frac{n + 8n' - 12nn' + 12n'^2}{6n'}$$

La presión media es $\frac{n'}{n} H'$; la total, C_h, $a \times 2(n - n')c \times \frac{n'}{n} H$. Lo relativo á la armadura a no se altera, y resulta, en fin:

$$M = \frac{H'}{100} ac^2 \times \left[\frac{n^2 + 7nn' - 8n'^2 - 12n^2n' + 24nn'^2 - 12n'^3}{3nn'} + rq' \frac{n' - nn' + n'^2}{n}\right] \qquad (64)$$

La expresión de M en función de A sería aun más complicada é inútil, puesto que A, A' se deducen de (3) y (4) en función de H'.

En el caso, más usual, de no haber armadura superior, $q' = o$, y

$$n = \frac{rq + 2n''^2}{rq + 2n''} \qquad (65)$$

$$A = r\frac{1 - n}{n} H' \qquad (51)$$

$$M = \frac{H'}{100} ac^2 \times \frac{n^2 + 7nn' - 8n'^2 - 12n^2n' + 24nn'^2 - 12n'^3}{3nn'} \quad (66)$$

Análogamente, con los datos, r, a, c, q, q', n'', M, las ecuaciones (63) ó (65) dan n y $n' = n - n''$; (64) ó (66) hacen conocer H', y (51), (52) A y A'

Si para forma tan sencilla como la T, el cálculo es tan laborioso, fácil es figurarse lo que resultaría aplicado á una forma compleja, una sección tubular, por ejemplo. Hay, sin embargo, un procedimiento sencillísimo que, por complicadas que sean la sección y la distribución de las armaduras, da con rapidez la incógnita fundamental, la posición de la fibra neutra cuando se prescinde del hormigón extendido, cuya área, límitada por la fibra neutra, es tan desconocida como ésta.

III

Procedimiento gráfico.

Sea una pieza de sección simétrica cualquiera, (fig. 38), con diversos órdenes de barras. Numeremos éstas á partir de las inferiores, y formemos un polígono de fuerzas horizontales 0, 1, 2, 3... que representen las respectivas secciones amplificadas, $r\alpha$, en centímetros cuadrados, por magnitudes lineales, $\frac{r\alpha}{B}$, con la base de reducción B centímetros; la distancia polar, Δ, es arbitraria.

Dividamos el área de hormigón en partes, tanto más numerosas cuanta mayor exactitud se quiera. Por sus centros de gravedad y por los de las armaduras, tiremos horizontales, numerándolas de arriba abajo, 1′ 2′ 3′ 4′..., por el orden en que se presenten, correspondan á hormigón ó á ar-



maduras. Formemos otro polígono de fuerzas 0′, 1′, 2′, 3′... con las magnitudes $\frac{h}{B}$, $\frac{\gamma\alpha'}{B}$, y con una distancia polar, $\Delta'=\Delta$.

Trazados los funiculares respectivos *O, I, II, III...*, *O′, I′, II′, III′...*, hasta que se corten, el segmento horizontal, *s*, comprendido entre la intersección *(III III′)* y el lado extremo común *O O′*, multiplicado por la distancia polar,

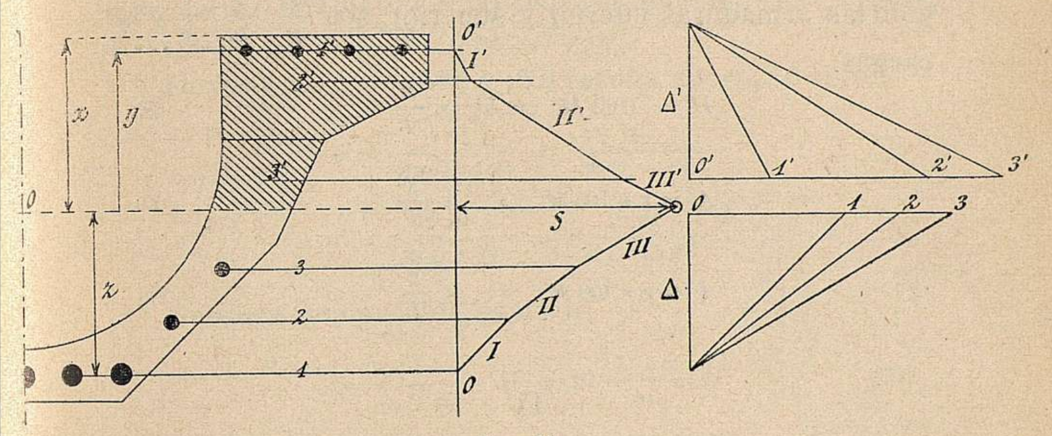


Figura 38.

$\Delta = \Delta'$, mide: en el polígono (*O... III...*) la suma de momentos de las áreas 1, 2, 3..., armaduras inferiores, respecto á la horizontal *s*; en el polígono (*O′... III′...*) la suma de momentos de las fuerzas 1′, 2′, 3′..., armaduras unas, hormigón otras, respecto á la misma horizontal. La igualdad de ambos momentos totales exige que *s* pase por el centro de gravedad del área virtual, compuesta por todas las armaduras amplificadas, más el hormigón, pero sólo el comprimido.

Según el método de Mohr, el área total, *(O I II III, III′ II′ I′ O′)*, envuelta por los dos funiculares y su lado común, es el momento de inercia de la sección virtual considerada, dividido por 2Δ.



Las magnitudes verticales están en una escala $\frac{1}{e}$; las horizontales están reducidas en $\frac{1}{B}$. El área medida en el dibujo, S cm², representa $S\,e\,B$ cm³, y resulta:

$$I = S\,(\text{cm}^2) \times e \times B\,(\text{cm.}) \times 2\Delta\,(\text{cm.}) \qquad (67)$$

Los momentos de resistencia del hormigón comprimido y de las armaduras inferior y superior, son $\frac{I}{x}$, $\frac{I}{z}$, $\frac{I}{y}$ y las cargas:

$$H' = (100\,M)\ \text{cm-kg.} \times \frac{x}{I} \qquad (68)$$

$$A' = r \times 100\,M \quad » \quad \times \frac{y}{I} \qquad (69)$$

$$A = r \times 100\,M \quad » \quad \times \frac{z}{I} \qquad (70)$$

IV

Piezas asimétricas.

El cálculo deductivo es más ó menos sencillo, pero siempre factible, por los métodos expuestos; pero el inductivo resultaría muy penoso, á veces imposible, á no llegar á expresiones más fáciles, que permitan los tanteos, inevitables en general, dada la indeterminación del problema.

En las piezas asimétricas hemos llegado á las expresiones:

$$M = H' \times ac^2 \times f_h(n) = A \times f_a(n);$$

que, como n es función de la variable, q, pueden ponerse en la forma:

$$\frac{M}{q\,ac^2} = \mu = H' \times \varphi\,(q) = A \times \psi\,(q). \qquad (71)$$



Como H' y A están ligados por la relación $\frac{A}{H'} = r\frac{1-n}{n} = F(q)$, de las tres cantidades A, H', q, sólo se pueden fijar arbitrariamente dos, A y H', ó A y q, ó H' y q.

En el primer caso, q, queda determinada. El valor $\frac{M}{q\,ac^2} = \mu$, *momento específico* de una pieza ideal, en la que q, a y c fueran todos iguales á la unidad, es el mismo, se exprese por $H'\,\varphi(q)$, ó por $A\,\psi(q)$.

De las ecuaciones (49) y (53) resulta ahora, ($r = 15$):

$$q = \frac{n^2}{2r(1-n)} = \frac{n^2}{30(1-n)} \tag{72}$$

$$n = \frac{r\,H'}{A + r\,H'} = \frac{15\,H'}{A + 15\,H'} \tag{73}$$

Subsiste siempre (51), es decir,

$$A = r\,\frac{1-n}{n}\,H' = 15\,\frac{1-n}{n}\,H' \tag{74}$$

$$H' = \frac{n}{r(1-n)}\,A = \frac{n}{15(1-n)}\,A \tag{75}$$

así como (53), ó ahora:

$$n = \frac{15\,H'}{A + 15\,H'} \tag{76}$$

$$\frac{M}{q\,ac^2} = \frac{M}{\alpha\,c} = \mu = \frac{H'}{100} \times \frac{3n - n^2}{6\,q} \tag{77}$$

$$\frac{M}{q\,ac^2} = \frac{M}{\alpha\,c} = \mu = \frac{A}{100} \times \frac{3-n}{3} \tag{78}$$

La tabla siguiente (79) da los valores de las cuantías *críticas*, q_c, correspondientes á determinados límites A, H', con las profundidades, n, de la fibra neutra, y los momentos específicos críticos μ_c.

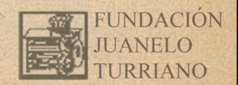


TABLA (79)

$A =$	1.200			1.100			1.000			900		
H'	n	q_c	μ_c	n	q_c	μ_c	n	q_c	μ_c	n	q_c	μ_c
55	·411	·009 5	10,36	·429	·010 7	9,43	·452	·012 4	8,49	·478	·014 6	7,57
50	·385	·008 0	10,46	·391	·008 3	9,56	·429	·010 7	8,57	·455	·012 7	7,64
45	·360	·006 75	10,56	·380	·007 7	9,61	·403	·009 1	8,66	·427	·010 6	7,72
40	·333	·005 5	10,67	·353	·006 4	9,70	·375	·007 5	8,75	·400	·008 9	7,80
35	·304	·004 4	10,78	·323	·005 6	9,81	·344	·006 0	8,85	·368	·007 1	7,90
30	·273	·003 4	10,91	·290	·003 9	9,94	·310	·004 6	8,93	·333	·005 5	8,00
25	·238	·002 5	11,05	·254	·002 9	10,06	·273	·003 4	9,09	·294	·004 1	8,12
20	·200	·001 7	11,20	·214	·001 9	10,21	·231	·002 3	9,23	·250	·002 8	8,25



En una pieza de cuantía mayor que una cualquiera de las q_c, á igual carga A que se imponga, resultará una H' mayor que la correspondiente en la tabla; ó si se impone igual H', A resultará necesariamente menor que la allí dada. Forzar la cuantía equivale á bajar el centro de gravedad y aumentar n y, según (51), á forzar H' para igual A, ó á rebajar A para igual H'. Y á la inversa.

Así, pues, para determinados límites prácticos de las cargas H' y A, las dos expresiones (77), (78), del momento específico, idénticas para la cuantía crítica q_c, son *distintas* para otra cualquiera. Si $q < q_c$, el hormigón trabaja desahogadamente cuando la armadura sufre la carga límite A; (78) da el momento específico, limitado por el trabajo de la armadura, que llamaremos μ_a. Si, por lo contrario, $q > q_c$, la fibra superior del hormigón alcanza el límite H' antes que la armadura el suyo; (77) expresa entonces el momento específico limitado por el hormigón, μ_h.

A los límites ordinarios adoptados, 45 y 1.200 kilogramos por centímetro cuadrado, corresponde $q = 0{,}006\ 75$. Parece que lo más conveniente y económico sería adoptar esa cuantía como tipo, puesto que con ella se apuran las resistencias prácticas de los dos elementos.

Pero, lejos de ser así, conviene, según los casos, hacer variar la cuantía entre límites muy extensos; valores muy pequeños para las piezas de gran anchura y poco canto; valores bastante crecidos para las muy esbeltas ó cuyas dimensiones interesa, por conveniencia de la obra, reducir al mínimo.

De aquí que lo práctico sea tener en una tabla calculados, en función de las cuantías, los momentos específicos límites μ_h, μ_a, adoptando, naturalmente, el menor de los dos y reduciéndolos, para facilitar las operaciones, á números



enteros, que llamaremos momentos específicos prácticos, μ_1.

La tabla (80), al final del volumen, contiene en sus nueve columnas:

1.ª La clase de piezas, asimétricas, ó disimétricas, que, como veremos, se reducen á aquéllas; los valores del momento específico práctico, μ_1, y las expresiones del momento resistente,

$$M = \mu_1 \times qac^2 = \mu_1 \times qac \times c = \mu_1 \times \alpha c;$$

M en metros-kilogramos; a, c, en centímetros, y α en centímetros cuadrados.

2.ª Los diversos valores de $q = \frac{\alpha}{ac}$.

3.ª Las profundidades, n, de la fibra neutra, para un canto útil igual á la unidad.

4.ª Las relaciones, deducidas de (77)

$$\frac{H'}{\mu} = \frac{600}{3n - n^2}\, q,$$

es decir, las cargas máximas H' por unidad de valor de μ.

5.ª Los valores límites, $\mu_h = \mu_{45}$, que, en virtud de lo anterior, igualarían H' á su límite práctico de 45 kilogramos por centímetro cuadrado.

6.ª Las relaciones, deducidas de (78)

$$\frac{A}{\mu} = \frac{300}{3 - n},$$

cargas máximas, A, por unidad de μ.

7.ª Los valores límites, $\mu_\alpha = \mu_{1.200}$, que, análogamente, llevarían A á su límite práctico de 1.200 kilogramos por centímetro cuadrado.

8.ª Las cargas máximas reales que corresponden á los



momentos específicos prácticos, adoptados en la primera columna.

La 9.ª se refiere á las piezas disimétricas.

Los valores de μ_1 decrecen desde 11 hasta 6 cuando las cuantías suben de 0, 000 4 á 0, 025 0. La máxima carga, H', muy baja para las cuantías pequeñas, se acerca mucho á 45 para $q = 0,006\,75$, que es la crítica $\left(\frac{A}{H'} = \frac{1.200}{45}\right)$; no es 45 exactamente, porque el momento práctico, 10, es inferior al límite exacto, 10, 56.

A partir de $q = 0,008$, las columnas 3, 4 y 8 contienen dos números; los inferiores son los correspondientes á las piezas con armadura asimétrica. Como sabíamos, las cargas H' crecen rápidamente con la cuantía, y, aun rebajando bastante el momento límite, μ_a, relativo á la armadura, se llega á presiones inadmisibles, hasta de 65 kilogramos por centímetro cuadrado.

Se necesita, sin embargo, á veces, una fuerte armadura para que las piezas puedan ser relativamente pequeñas. Para que aquélla trabaje eficazmente, es indispensable ayudar al hormigón, rebajar su carga máxima, introduciendo una armadura superior. Entramos en el caso que sigue.

V

Piezas disimétricas.

Necesitamos poder emplear fuertes cuantías sin que la carga máxima, H', exceda de su límite ordinario, 45 kilogramos por centímetro cuadrado.

Según la relación fundamental, (51), $H' = \frac{n}{15(1-n)} A$,



H', para determinada A, sólo depende de n, es decir, de la posición de la fibra neutra, que podemos fijar arbitrariamente, dentro de ciertos límites, introduciendo una armadura superior que contrabalancee el aumento de la inferior, manteniendo á la profundidad conveniente el centro de gravedad.

Determinemos, por tanto, n en función de la constante H' y de la variable μ_h, momento específico límite respecto al hormigón. De las ecuaciones (77) y (72) se obtiene, por eliminación de q:

$$\mu_h = \frac{H'}{600} (3 - n)\, n \times \frac{30\,(1-n)}{n^2}; \qquad (81)$$

ó bien:

$$9\,n^2 - (36 + 4\,\mu_h)\,n + 27 = 0$$

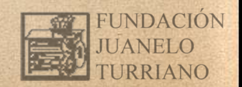
que, para los valores enteros, prácticos, de $\mu_h = 10, 9, 8, 7$ y 6, da $n = 0{,}371, 0{,}394, 0{,}421, 0{,}450$ y $0{,}485$.

Para obtener los valores de q y de q' que, correlativamente, dan esos de n, basta recurrir á la ecuación general (1) fijando la altura de las barras superiores en $n' = 0{,}8\,n$, promedio práctico, y despejar la incógnita:

$$q' = \frac{2\,r\,(1 - n)\,q - n^2}{2\,r\,n'} = \frac{30\,(1 - n)\,q - n^2}{24}, \qquad (82)$$

en función de q y del valor n ya determinado por la condición (81).

Así hemos calculado los valores de n y de q'_{45} que figuran en las columnas 3 y 9 de la tabla (80), para una escala gradual de números μ_1. Como se ve, las profundidades n, en guarismos gruesos, son inferiores, lógicamente, á las relativas á piezas asimétricas y constantes para un mismo μ_1; $\frac{H'}{\mu}$ lo es análogamente y H', como queríamos, *siempre vale 45*



kilogramos por centímetro cuadrado. Los momentos prácticos adoptados son intermedios entre los límites μ_h y μ_a y siguen la serie 10, 9, 8, 7, 6.

Hemos limitado las cuantías q'_{45} á 0,5 q, poco más ó menos. Como sucede en las piezas comprimidas, esas barras no trabajan económicamente; según el criterio adoptado, $A' = 0,8 \times r\, H' = 12 \times 45 = 540$ kilogramos por centímetro cuadrado.

Las piezas disimétricas entran dentro del mismo procedimiento general que para las asimétricas detallaremos.

VI

Piezas simétricas.

Con el valor medio de $n' = 0,8\, n$, ó $n'' = 0,2\, n$, adoptado para definir prácticamente la posición de la armadura superior, resulta de las ecuaciones generales:

$$n^2 + 54\, q \times n - 30\, q = o;\ q = \frac{n^2}{30 - 54\, n} \qquad (83)$$

$$n = -27\, q + \sqrt{729\, q^2 + 30\, q} \qquad (84)$$

$$\frac{M}{q\, a\, c^2} = \mu_h = \frac{H'}{100}\left[\frac{3\, n - n^2}{6\, q} + 15\, \frac{0,8\, n - 0,8\, n^2 - 0,64\, n^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{H'}{100} \times \frac{15 - 20\, n + 6,6\, n^2}{n} \qquad (85)$$

Subsisten, como siempre, las relaciones (51) y (52) que dan A y A' en función de H'. La cuantía crítica para el hormigón usual, con los límites $H' = 45$, $A = 1.200$, corresponde á $n = 0,360$, (53) y $q_c = 0,012\,4$, (83). Para el hormigón de



400 kilogramos por metro cúbico, resulta, análogamente, $n = 0{,}412$ y $q_c = 0{,}021\,9$. Con cuantías inferiores á esas, el momento límite es el relativo á la armadura; con cuantías superiores, el que corresponde al hormigón.

La tabla (86), al final del volumen, contiene en las columnas 1 á 7 los mismos elementos que en la tabla (80): momentos resistentes prácticos, de 11 á 8 y de 10 á 9 para las dos clases de hormigón; cuantía $q = q'$; profundidad de la fibra neutra, n; máxima compresión unitaria por unidad de momento específico, $\frac{H'}{\mu}$; valor de este último que iguala dicha carga al límite práctico, μ_{45}, ó μ_{56}; tensión unitaria por unidad de μ, $\frac{A}{\mu}$; valor de μ que hace $A = 1.200$.

La expresión del momento resistente es la misma de las piezas asimétricas ó disimétricas, $M = \mu_1 \times q\, a c^2 = \mu_1 \times a c$: el criterio y el procedimiento práctico son idénticos para las tres clases de armadura.

Como muchos constructores suelen expresar el momento resistente, no en función del canto, c, sino de la distancia, d, entre las dos armaduras, consignamos en la columna 8 los valores del momento específico que corresponde:

$$\mu' = \frac{M}{\alpha \times d} = \frac{M}{\alpha\,(1 - n + 0{,}8\,n)\,c} = \frac{M}{\alpha\,(1 - 0{,}2\,n)\,c}$$

De no estar limitado M por el máximo admisible para H', μ' sería, independientemente de la cuantía y de la clase de hormigón, casi constante é igual á 11,66. Para que H' no rebase la carga práctica, μ' tiene que disminuir, hasta 8,85 en el hormigón de 300 kilogramos por metro cúbico y 10,56 en el de 400.

Resulta así demostrado lo erróneo que es el procedimiento de muchos constructores. Suponen que por el mero



hecho de estar anegada en hormigón una armadura simétrica, su carga real corresponde á una, aparente, de 1,30 á 1,50 veces mayor y hacen:

$$(100\ M)\ (cm\text{-}kg) = 1.500\ ad;\quad M\ (m\text{-}kg) = 15\ ad$$

cuando no es posible pasar de 11,66 *ad*, á menos de cargar excesivamente el hormigón, si $q > q_c$ y la misma armadura, si $q < q_c$.

Las piezas simétricas son menos económicas aún que las disimétricas; la armadura inferior trabaja relativamente poco y menos aún la superior. En cambio reducen á un mínimo la altura y, sobre todo, son insustituíbles cuando la flexión puede cambiar de sentido, con máximos próximamente iguales.

Consignamos los datos referentes á hormigón de 400 kilogramos, para los casos excepcionales en que convenga reducir todo lo posible el volumen de las piezas.

VII

Resumen práctico.

Hemos reducido la expresión del momento resistente de una pieza rectangular, sea su armadura asimétrica, disimétrica ó simétrica, á la forma (1):

$$M\ (\text{m-kg.}) = \mu_1 \times qac^2\ (\text{cm} \times \text{cm}^2) \qquad (88)$$

---

(1) Si, para conservar la homogeneidad en la forma, (en el fondo subsiste siempre), se expresaran a y c en metros, las cargas unitarias, H', A, estarían multiplicadas por 10^4 y los momentos específicos, μ, por 10^6. En cambio, los productos $(q\ a\ c^2)$ serían, en general, números con muchas decimales, resultando las operaciones molestas y propensas á equivocaciones.



El producto $q \times ac^2$, de un número abstracto, q, por una magnitud de tres dimensiones, ac^2, representa, salvo un factor numérico, el módulo de resistencia $\frac{I}{v}$, de la sección virtual equivalente á la heterogénea.

La magnitud μ_1 es de las dimensiones fuerza partida por superficie, y representa, salvo otro factor numérico, la máxima carga unitaria de la sección virtual. El nombre de momento específico unitario no es, por tanto, el apropiado, pero lo usamos como más gráfico.

Esa expresión conserva toda la exactitud del cálculo deductivo; sólo que al sustituir por números enteros las cantidades μ_1, no se apura por completo aquél de los límites de carga, H' ó A, á que corresponden, y que, por la naturaleza del problema, sólo con determinados valores q se pueden apurar igualmente los dos límites.

La expresión, (88), perfectamente racional, que implica siempre un coeficiente de seguridad algo mayor que el tomado como tipo, es eminentemente propia para el cálculo inductivo, por su sencillísima forma.

Examinemos la influencia de los elementos que la componen.

M es en cada caso una constante, el momento que se trata de realizar; μ_1 es variable entre 11 y 6 cuando q, cuantía de la armadura inferior sola, sube desde 0, 000 2 hasta 0, 025 0, involucrando, á partir de 0, 008 0, la existencia necesaria de otra q', desde 0 hasta 0, 025 0. El valor medio, en la gran mayoría de los casos prácticos, es, como veremos, $\mu_1 = 9$.

La sección total de hormigón es:

$$h = ac = \frac{M}{\mu_1} \times \frac{1}{q} \times \frac{1}{c} \qquad (89)$$



$\frac{M}{\mu_1}$ crece al aumentar q, y $\left(\frac{M}{\mu_1} \times \frac{1}{q}\right)$ decrece, porque las variaciones de μ_1 son más lentas que las de q; á igualdad de condiciones conviene, por tanto, aumentar q. Se economiza hormigón y se aligera el peso muerto de la pieza. Pero la influencia más decisiva es la de c: á igualdad de q, el volumen de hormigón, ac, es inversamente proporcional al canto útil.

Ya veremos que la importante influencia de las cargas transversales no permite que ac baje de un cierto límite, lo que impide aumentar c arbitrariamente.

La sección de la armadura principal, la inferior, con la que va aumentando la de la superior, cuando existe, es:

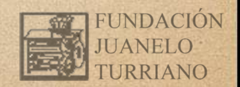
$$\alpha = qac = \frac{M}{\mu_1} \times \frac{1}{c} \qquad (90)$$

y es también inversamente proporcional al canto útil. La influencia de q se traduce en el aumento de $\frac{M}{\mu_1}$ al disminuir μ_1. Como el elemento más costoso es la armadura y el crecimiento de q implica, á partir de cierto límite, la necesidad y el rápido crecimiento de q', resulta evidente, aunque no se pueda formular algebraicamente, que la mayor economía se obtendrá dando á q valores intermedios, que reduzcan poco μ_1 y que, sobre todo, no exijan armadura superior q'. Y siempre, de un modo indudable, forzando cuanto se pueda el canto, c.

Un tercer elemento acaba de dilucidar la cuestión. El producto

$$ac^3 = \frac{M}{\mu_1} \times \frac{1}{q} \times c \qquad (91)$$

mide, salvo un factor siempre el mismo, el momento de iner-



cia, es decir, la rigidez de la pieza; es directamente proporcional al canto, c, y está sujeto á la misma influencia de q que la sección h, por la proporcionalidad á $\left(\frac{M}{\mu_1} \times \frac{1}{q}\right)$.

Interesa que ac^3 sea grande, es decir, que la pieza sea poco deformable; lo que se puede lograr al mismo tiempo que la mayor economía en h y en α forzando c y conservando q entre los valores intermedios, como hemos visto.

Un ejemplo acabará de aclarar esta importante cuestión. Para un momento de 1.000 metros-kilogramos, adoptemos $q = 0{,}008\,0$, que exige $q' = 0{,}001\,5$, y en total, en números redondos, una cuantía *total* de 0,010 0: μ_1 es todavía 10. Obtendremos para diversos cantos:

c (cm)	a (cm)	ac (cm^2)	α (cm^2)	ac^3 (cm^4)
10	125	1.250	12,5	125.000
25	20	500	5	312.500
50	5	250	2,5	625.000

(92)

El momento resistente es siempre 1.000 y las tres piezas no pueden ser, sin embargo, más distintas: una, de gran anchura, una losa de un *peralte* $\frac{c}{a} = \frac{10}{125} = 0{,}08$; otra próximamente cuadrada, con secciones 2,5 veces menores, tanto de hormigón como de armaduras, y de rigidez 2,5 veces mayor que la primera; y otra, en fin, de un peralte $\frac{50}{5} = 10$, con 5 veces menos materiales y 5 veces más rigidez.

En su lugar veremos que la influencia de las cargas transversales puede hacer inaceptables las soluciones en que ac baja de un cierto valor.



Adoptemos ahora una cuantía de 0,002 5, cuarta parte de la total anterior; μ_1 sube á 11.

c	a	ac	α	ac^3
10	367,6	3.677	9,19	367.700
25	58,8	1.471	3,67	919.375
50	14,7	735	1,84	1.837.500

(93)

Estas tres piezas guardan entre sí la misma relación que las anteriores.

Análogamente, con $q = 0{,}025\,0$ y $q' = 0{,}013\,0$ ó sea una cuantía total, $q_t = 0{,}038\,0$, 4 veces en números redondos más que al principio, $\mu_1 = 6$.

c	a	ac	α	ac^3
10	66,7	667	25,2	66.700
25	10,7	267	10,1	166.875
50	6,7	133	5,1	333.750

(94)

¿Cuál de esas 9 piezas, limitándonos á considerar los tipos extremos é intermedio, se debe preferir? Todas resisten exactamente lo mismo, 1.000 metros-kilogramos: la cantidad de acero varía desde 1,84 hasta 25,2; la de hormigón, de 133 á 3.677; la rigidez oscila entre 66.700 y 1.837.500... Las condiciones relativas á las cargas transversales, en primer lugar, las generales del caso práctico y la de máxima economía, después, eliminan, por lo menos aproximadamente, la indeterminación.

Según su destino en la obra, la pieza deberá ser poco, medianamente ó muy peraltada, de poca, de regular ó de mucha rigidez: unas veces convendrá un forjado de mucho ancho y poco canto, 367×10 podría servir, por ejemplo; otras, se necesitará una pieza cuadrada ó poco menos, para una riostra, y convendría 20×25; otras, será preferible un nervio estrecho y, sin embargo, bastante rígido y al mismo tiempo de escaso peso, y $6{,}7 \times 50$ pudiera quizá ser la solución.

Aparte de esto, como en general conviene forzar el canto, y las condiciones del destino en la obra lo limitan para cada pieza, comparemos las 3 piezas de 25 centímetros de canto, por ejemplo. Sus costos, á 100 pesetas por metro cúbico y 0,40 pesetas por kilogramo, son:

$$q = 0{,}008\,0 - : 0{,}050\,0 \text{ m}^3 \times 100 + 0{,}500 \times 7{,}8 \times 0{,}40 = 6{,}56 \text{ ptas.}$$
$$q = 0{,}002\,5 - : 0{,}147\,1 \text{ » } \times 100 + 0{,}367 \times 7{,}8 \times 0{,}40 = 15{,}85 \text{ »}$$
$$q = 0{,}025\,0 - : 0{,}026\,7 \text{ » } \times 100 + 1{,}010 \times 7{,}8 \times 0{,}40 = 5{,}82 \text{ »}$$

Las primera y última son poco más ó menos equivalentes: aquélla tiene á su favor la rigidez, 312.500 contra 166.875, la mayor sencillez de mano de obra (particularmente respecto á las armaduras secundarias) y la masa, moderadamente mayor, cosa favorable; la última sólo ofrece una ligera economía y la disminución de peso.

La intermedia, de mínima cuantía, es la más costosa, porque de su gran volumen de hormigón sólo una pequeña zona, la comprimida, se aprovecha. Si en lugar de la forma en rectángulo se adopta la de *T*, limitando el forjado á la profundidad de la fibra neutra, $0{,}24\,c = 6$ centímetros, con un alma de 10×19, el hormigón se reduce de 1.471 centímetros cuadrados á 545, y el coste de 15,85 á 6,59.

Estos costos, calculados sobre un precio único del hor-



migón, son teóricos; la mano de obra y los gastos de moldes, etcétera, resultan prácticamente mínimos para cuantías intermedias, únicas que al fin y al cabo son las más recomendables en la generalidad de los casos, del mismo modo que tampoco se debe exagerar la esbeltez ó peralte de las secciones forzando demasiado el canto útil. Siempre que las condiciones del problema no impliquen otra cosa, es preferible mantenerse entre $q = 0{,}006$ á $0{,}012$ y tantear partiendo de $\mu_1 = 9$.

VIII

Gráficos y ejemplos.

Elegido un valor de q, las tablas dan el μ_1 aplicable, y se tiene sucesivamente:

$$\frac{M}{\mu_1} = (qac^2) \tag{95}$$

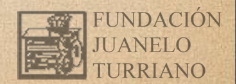
$$\frac{(qac^2)}{c} = (qac) = \alpha \tag{96}$$

$$\frac{(qac)}{q} = (ac) = h \tag{97}$$

$$\frac{(ac)}{c} = a \tag{98}$$

Cada valor que se fije para c da los de α, h y a; el tanteo se repite hasta que c y a parezcan los más á propósito y α se pueda obtener, prácticamente y con aproximación por exceso, con un cierto número de barras de los diámetros tipos adoptados, número que generalmente es par, y cuya influencia, así como la del diámetro de las barras, veremos pronto.

Esta serie de operaciones resulta penosa hecha numéri-



camente. La representación de las funciones y variables contenidas en (95) á (98) por medio de abacos de alineación, ó de líneas isopletas, da una solución tan sencilla como elegante.

Cada función ó variable está representada (fig. 39) por

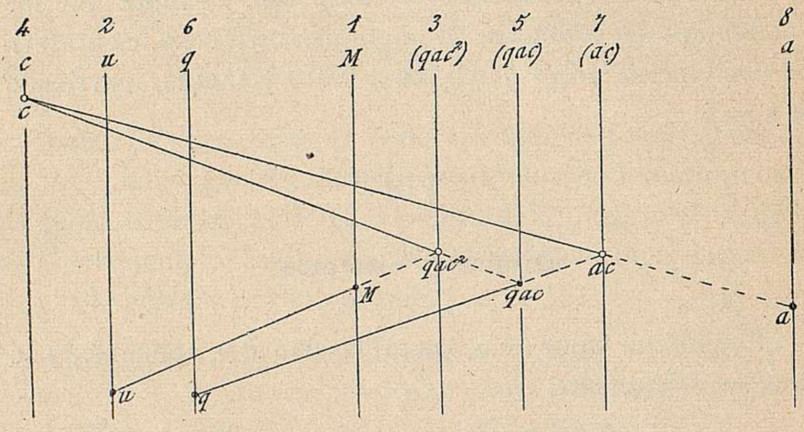
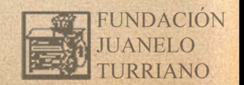


Figura 39.

un *soporte* rectilíneo, con graduación logarítmica, sencilla ó doble. Los valores correspondientes en cada tres soportes consecutivos están representados por puntos situados en línea recta. Así, el grupo 1, 2, 3, determina, por la recta $M - \mu$ prolongada, el valor (qac^2) en el soporte 3. La recta $(qac^2) - c$, da, en el grupo 3, 4, 5, el valor $(qac) = \alpha$ en el soporte 5. En el sistema 5, 6, 7, la recta $(qac) - q$ da sobre el soporte 7 el valor $(ac) = h$. Y en el grupo 7, 4, 8, la recta $(ac) - c$, determina finalmente en el soporte 8 el valor de a. Las rectas se trazan como siempre, en un papel transparente, y el tanteo se hace con suma facilidad (1).

El gráfico (99), al final del volumen, contiene los ocho soportes, con graduaciones sobradamente extensas para to-

(1) Por error aparecen en el soporte 2 las letras u en lugar de μ.



dos los casos prácticos y en escalas combinadas de modo que resulte lo más claro posible. Le acompaña una tabla resumen (100). En ésta, para cada q se consignan los valores de μ (exacto) y μ_1 (práctico), y los de n, n' y n'', así como los de q'; se reúnen, pues, todos los elementos necesarios para dejar determinada la sección y armaduras. También figuran los valores de ciertas funciones de n, que sirven para el cálculo respecto á las cargas transversales.

En los forjados, los datos, peso muerto y sobrecarga se refieren al metro superficial y el momento flector á una faja de un metro de ancho. Quedan solamente una indeterminada y una incógnita, la cuantía y el canto, ó viceversa. Así, puesto que $a = 100$:

$$M = \mu . q \times 100\, c^2; \quad c = \sqrt{\frac{M}{100\, \mu q}} = \nu \sqrt{M}$$

La última columna de la tabla (100) contiene los valores de $\nu = \frac{1}{10 \sqrt{\mu . q}}$, que multiplicados por $\sqrt{M}$, dan directamente el canto c, para la cuantía q arbitrariamente fijada.

En el gráfico (99), el soporte (1) representa M, en metros-kilogramos, desde 10 á 50.000; (2) μ ó μ_1, pudiendo, si se quiere apurar la exactitud, hacer al final el cálculo sobre el valor exacto, μ, dado por la tabla.

El soporte (3) representa (qac^2) en centímetros terceros, con dos graduaciones: á la izquierda, de 1 á 1.000, y á la derecha, de 2,5 á 5.000.

(4) contiene análogamente c en centímetros, de 4 á 10 y de 10 á 50.

(5) da, en graduación única y en centímetros cuadrados, $(qac) = \alpha$, desde 0,25 hasta 100.

(6) representa la cuantía q, expresada en milésimas,



desde 2 hasta 5 á la izquierda, y de 5 hasta 25 á la derecha.

(7) da las secciones $(ac) = h$, en centímetros cuadrados, de 20 á 4.000 y de 50 á 10.000.

(8) contiene las anchuras, a, desde 5 hasta 300 centímetros.

En los soportes de doble graduación, la más usual es la de la derecha; al usar de la izquierda en uno, debe hacerse lo mismo en los demás.

Es fácil introducir un factor ó un reductor 10, si la cuantía ó el canto salen de los límites consignados. Si, por ejemplo, $q = 0,000\,3$ para una sección en T, se toma, en (6), el valor 3, (milésimas), 10 veces mayor; claro es que habrá que multiplicar por 10 el valor (ac) obtenido en (7). Análogamente, si $c = 120$ centímetros, al tomar, en (4), el valor 12, 10 veces menor, habrá que dividir por 10 el obtenido en (5) para (qac).

Ejemplos. — Sea $M = 20.000$ metros-kilogramos; si $q = 0,016$, $\mu_1 = 8$ y $(qac^2) = 2.500$. Si $c = 100$, tomando 10 á la izquierda de (4), obtendremos $qac = \frac{1}{10} \times 100 = 10$ centímetros cuadrados, y después $ac = 625$. Tomando este mismo 625 en la graduación izquierda para que corresponda con 10 en (4), se obtiene 62,5 en la escala única de (8), y, por tanto, $a = 6,25$ centímetros.

No conviene tanto peralte: para $c = 80$, había que tomar 8 á la izquierda de (4), y como la recta cortaría á (5) fuera de la graduación, reducir qac^2 al décimo, ó 250, que, tomados también á la izquierda de (3), dan $qac = 31,25$ (las dos reducciones nada alteran); corresponde casi 2.000 en (7) para valor de ac, (exactamente 1.953); y tomado este número á la izquierda de (7), con 8 en la homóloga de (4), da casi 250, (exactamente 2.483), en (8), ó sea 25 centímetros para a.



La sección sería, por tanto, de 25×80 centímetros, con armadura inferior de $2.000 \times 0,016 = 32$ centímetros cuadrados y superior de $2.000 \times 0,009 = 20$ centímetros cuadrados, colocada á $80 \times 0,084 = 6,72$ ó 7 centímetros de profundidad.

Si ha de resistir al mismo momento de 20.000 metros-kilogramos una pieza en T y suponemos $q = 0,001$ y $\mu_1 = 10$, obtendremos: $qac^2 = 2.000$, y para $c = 100$, tomando 200 en (3) y 10 en (4), ambos á la izquierda, $qac = 20$. Para una q ficticia de 10, (milésimas), resulta $ac = 10 \times 2.000 = 20.000$ centímetros cuadrados; y para 2.000 y 10, ambos á la izquierda de (7) y (4), $a = 200$. La sección aparente sería de 200×100, que debería reducirse á un forjado de $100 \times 0,159$ ó 16 centímetros de espesor, con el alma ó nervio del espesor exigido por las cargas transversales, armado con 20 centímetros cuadrados de barras.

Claro es que los gráficos sólo sirven para tantear y dar una idea de la variación de dimensiones de a, c y α; determinadas ya dos de ellas, conviene siempre repetir el cálculo con guarismos. Las secciones $qac = \alpha$ hay que igualarlas á lo que dé cierto número de barras; la anchura a ó el canto c, uno de los dos, hacerlos un número exacto y sencillo, y deducir el otro, seguros ya de que las variaciones de q no alteran el valor de μ_1 ó el de μ si se quiere tomar éste para escatimar en lo posible las secciones. En las formas en T, la anchura a suele ser un dato, la separación entre ejes de nervios de un piso; es mejor entonces tantear y calcular sobre la base $\frac{M}{a}$, momento resistente por centímetro de anchura, salvo multiplicar después la sección $\frac{(qac)}{a}$ obtenida, por a.

En forma general, más sencilla y rápida, se puede partir de un determinado μ_1 (en general, 9) y calcular:



$$\alpha = qac = \frac{M}{\mu_1} \times \frac{1}{c} \qquad (101)$$

ó bien:

$$c = \frac{M}{\mu_1} \times \frac{1}{\alpha} \qquad (102)$$

determinando después la anchura a por la condición $\alpha = qac$,

$$a = \frac{\alpha}{qc} \qquad (103)$$

dando á q valores á los que corresponda el μ_1 primeramente fijado.

Una tabla auxiliar, á continuación de la (100), da los pesos de barras cilíndricas y las secciones correspondientes á un número de aquéllas.



CAPÍTULO V

FLEXIÓN COMPUESTA

I

Compresión variable.

Cuando las fuerzas exteriores no se reducen á un par, sino á una fuerza, F, á distancia finita, f, del centro de gravedad de la sección, la flexión es compuesta; hay una flexión sencilla, debida al par Ff, más una compresión, ó tracción, uniforme, correspondiente á la fuerza F ya trasladada al centro de gravedad.

La fibra neutra, que para $f = o$ está en el infinito, (compresión uniforme), se acerca hasta situarse en el extremo de la sección, (compresión variable entre cero y un límite), para cierto valor de f, determinado por las dimensiones a, p, armaduras α, α' y colocación de éstas, y, z. Si f excede de ese valor, una parte de la sección está comprimida, otra extendida, predominando una á otra forma de trabajo según el valor de f y el signo de F; la fibra neutra, ya dentro de la sección, se acerca al centro de gravedad hasta alcanzarlo, (flexión sencilla), para una excentricidad, f, infinita.

Todo estriba en conocer la posición de la fibra neutra en función de los datos y siempre sobre la base de *prescindir del hormigón extendido,* si lo hay.

Sea (fig. 40) una pieza rectangular de ancho a y peral-



to p, armada, á las distancias y, z, contadas desde el centro de gravedad del hormigón, g_h, con secciones α' y α. El centro de gravedad del sólido virtual es g_t; la fibra neutra está

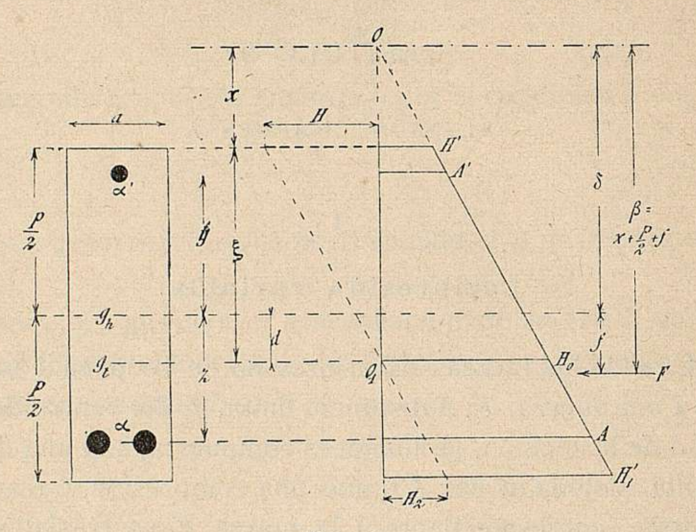


Figura 40.

en O, á la profundidad, ahora negativa, x, de la fibra superior.

El efecto del par de traslado de F á g_t sería una flexión sencilla, con una distribución de cargas HH_2, en la que no se prescindiera del hormigón extendido, puesto que no lo habría, por superar la presión *uniforme* H_0 á la tensión virtual H_2. La distribución final de cargas es la figurada por la línea $OH'H'_1$.

Llamando ξ la profundidad de la fibra neutra virtual correspondiente al par debido á F, los valores de las cargas H', H'_1, H_2, A', A, se expresan sencillamente en función de la carga virtual H, que correspondería al mismo par. De la figura se deduce inmediatamente:



$$H' = H\frac{x}{\xi} \qquad (104)$$

$$H'_1 = H\frac{x+p}{\xi} \qquad (105)$$

$$H_2 = H\frac{p-\xi}{\xi} \qquad (106)$$

$$A' = rH\,\frac{2x+p-2y}{2\xi} \qquad (107)$$

$$A = rH\,\frac{2x+p+2z}{2\xi} \qquad (108)$$

$$\frac{H'+H'_1}{2} = H\,\frac{2x+p}{2\xi} \qquad (109)$$

Lo que permite expresar la compresión total, F, en función también de H:

$$F = \frac{H'+H'_1}{2} \times a\,p + A'\,\alpha' + A\,\alpha =$$

$$\frac{H}{2\,\xi}\,\left[a\,p\,(2\,x+p) + r\,\alpha'\,(2\,x+p-2\,y) + r\,\alpha\,(2\,x+p+2\,z)\right] \qquad (110)$$

Aunque lo lógico es igualar los momentos flector y resistente tomados respecto á g_t, es más sencillo calcularlos respecto á g_h. Así resulta, expresando M en metros-kilogramos:

$$M_{(gh)} = \frac{H}{200}\left[a\,\xi\left(\frac{p}{2}-\frac{\xi}{3}\right) + a\,(p-\xi)\,\frac{p-\xi}{\xi}\left(\frac{p}{2}-\frac{p-\xi}{3}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{r\,\alpha'}{\xi}\,(2\,x+p-2\,y)\,y + \frac{r\,\alpha}{\xi}\,(2\,x+p+2\,z)\,z\right] \qquad (111)$$

Por último, la profundidad de g_t es:

$$\xi = \frac{a\,p^2 + r\,\alpha'\,(p-2\,y) + r\,\alpha\,(p+2\,z)}{2\,(a\,p + r\,\alpha' + r\,\alpha)} \qquad (112)$$



Sustituído este valor de ξ, función exclusiva de los datos, en (110) y (111) permite eliminar x y obtener H en función de F y de $M = F f \times \frac{1}{100}$. (104) (105) (107) y (108) dan H' H'_1 A' A.

El problema se simplifica mucho cuando, como es usual, la armadura se hace simétrica ($\alpha' = \alpha$; $y = z$; $g_h = g_t$). Resulta por sustitución, ó bien directamente:

$$H' = 2 H \frac{x}{p} \tag{113}$$

$$H'_1 = 2 H \frac{x + p}{p} \tag{114}$$

$$H_2 = H \tag{115}$$

$$A' = r H \frac{2 x + p - 2 z}{p} \tag{116}$$

$$A = r H \frac{2 x + p + 2 z}{p} \tag{117}$$

$$\frac{H' + H'_1}{2} = H \frac{2 x + p}{p} \tag{118}$$

$$F = \frac{H}{p} \left[(a p + 2 r \alpha)(2 x + p) \right] \tag{119}$$

$$M_{(gh)} = 2 \frac{H}{p} \left[\frac{a p^3}{12} + 2 r \alpha z^2 \right] \times \frac{1}{100} \tag{120}$$

Dividiendo (120) por (119)

$$\frac{M}{F} = f \times \frac{1}{100} = \frac{\frac{a p^3}{12} + 2 r \alpha z^2}{a p + 2 r \alpha} \times \frac{2}{2 x + p} \times \frac{1}{100};$$

ó bien

$$x + \frac{p}{2} = \frac{\frac{a p^3}{12} \times 2 r \alpha z^2}{a p + 2 r \alpha} \times \frac{1}{f};$$



y, por tanto:

$$\beta = x + \frac{p}{2} \times f = \frac{\frac{a p^3}{12} + 2 r \alpha z^2 + (a p + 2 r \alpha) f^2}{(a p + 2 r \alpha) f} \qquad (121)$$

expresión del brazo de palanca, β, entre la fuerza F y la fibra neutra, que resulta, como debe ser, igual al momento de inercia respecto á la fuerza F, dividido por el momento estático respecto á la misma.

Como antes, (120) y (119) dan los valores de x y de H, de los que se deducen inmediatamente H' H'_1 A' A.

La condición para que no exista tensión alguna es $x \geq O$. El límite superior de f está dado por

$$f = \frac{\frac{a p^3}{12} + 2 r \alpha z^2}{a p + 2 r \alpha} \times \frac{2}{p}.$$

Dividiendo numerador y denominador por $a p^3$ y haciendo $\frac{\alpha}{a p} = q$; $\frac{z}{p} = n'$

$$f = \frac{p}{6} \cdot \frac{1 + 24 r q n'^2}{1 + 2 r q} \qquad (122)$$

La ordenada límite del núcleo central es la del rectángulo homogéneo, $\frac{p}{6}$, multiplicada por el quebrado, cuyo valor es bastante mayor que la unidad; (para $q = 0,010$, $n' = 0,40$, $\frac{1,57}{1,30} = 1,208$). El primer efecto de la armadura simétrica es, por tanto, hacer admisibles mayores excentricidades, f, sin que lleguen á producirse tensiones.



II

Compresión y tracción.

Cuando f supera el límite calculado, la fibra neutra penetra dentro de la sección, que entonces sufre compresiones en una parte y tracciones en otra.

Sea en general, (fig. 41), una pieza disimétrica ap, some-

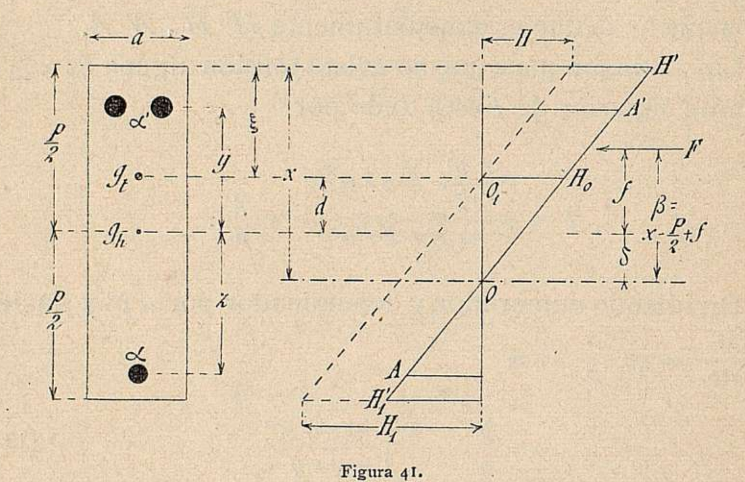
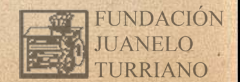


Figura 41.

tida á la fuerza F, de excentricidad f respecto á g_h. El efecto de aquélla es el de una flexión sencilla, representada por la línea de cargas $H H_1$, más el de la compresión uniforme H_0; en suma, una distribución de cargas $H' H'_1$. Con notaciones idénticas á las ya empleadas, se deduce de la figura:

$$H' = H \frac{x}{\xi} \tag{123}$$

$$A' = r H \frac{2y - p + 2x}{2\xi} \tag{124}$$



$$A = rH \frac{2z + p - 2x}{2\xi} \tag{125}$$

$$F = H' \frac{ax}{2} + A'\alpha' - A\alpha =$$

$$= \frac{H}{2\xi} \left[ax^2 + r\alpha' (2y - p + 2x) - r\alpha (2z + p - 2x)\right] \tag{126}$$

$$M_{(gh)} = \frac{H}{200} \left[\frac{ax^2}{\xi} \left(\frac{p}{2} - \frac{x}{3} \right) + r\alpha' \frac{2y - p + 2x}{\xi} y + \right.$$

$$\left. + r\alpha \frac{2z + p - 2x}{\xi} z \right] \tag{127}$$

La profundidad, ξ, de la fibra neutra es, prescindiendo del hormigón extendido:

$$\xi = \frac{ax^2 + r\alpha' (p - 2y) + r\alpha (p + 2z)}{2 (ax + r\alpha' + r\alpha)} \tag{128}$$

Quedan así determinadas las seis incógnitas, tres auxiliares, x, ξ, H, y tres únicas que interesan, H' A' A.

El problema, muy laborioso, se simplifica mucho si la armadura es simétrica, ($\alpha' = \alpha$, $y = z$, $g_h = g_i$), y resultan:

$$H' = H \frac{x}{\xi} \tag{129}$$

$$A' = rH \frac{2z - p + 2x}{2\xi} \tag{130}$$

$$A = rH \frac{2z + p - 2x}{2\xi} \tag{131}$$

$$F = \frac{H}{2\xi} \left[ax^2 + 2r\alpha (2x - p)\right] \tag{132}$$

$$M_{(gh)} = \frac{H}{200} \left[\frac{ax^2}{\xi} \left(\frac{p}{2} - \frac{x}{3} \right) + 4r\alpha \frac{z^2}{\xi} \right] \tag{133}$$



$$\xi = \frac{ax^2 + 2\,r\alpha p}{2\,(ax + 2\,r\alpha)} \tag{134}$$

Eliminemos ξ entre (133) y (134):

$$M = Ff \times \frac{1}{100},$$

ó bien:

$$\frac{H}{200}\left[\frac{ax^2}{\xi}\left(\frac{p}{2} - \frac{x}{3}\right) + 4r\,\alpha\,\frac{z^2}{\xi}\right] = \frac{H}{2\,\xi}\left[ax^2 + 2\,r\alpha(2x - p)\right] \times \frac{f}{100}$$

que se reduce á:

$$x^3 - 3\left(\frac{p}{2} - f\right)x^2 + 12\,r\,\frac{\alpha}{a}f \times x - 6\,r\,\frac{\alpha}{a}(fp + 2\,z^2) = O; \tag{135}$$

ecuación de tener grado en x que se resuelve por el método de Cardani, introduciendo una incógnita auxiliar, β, al hacer:

$$x = \beta - \frac{1}{3}\left[-3\left(\frac{p}{2} - f\right)\right] = \beta + \frac{p}{2} - f. \tag{136}$$

Como se ve en la figura, $\beta = x + f - \frac{p}{2}$, es precisamente el brazo de palanca entre la fuerza F y la fibra neutra.

La ecuación (135) se transforma en $\beta^3 + 3\,k\,\beta + 2\,l = O$, cuyos coeficientes son:

$$k = -\left[f^2 + \frac{p^2}{2} - pf - 4\,r\,\frac{\alpha}{a}f\right]$$

$$l = -\left[\frac{p^3}{8} - \frac{3}{4}p^2 f + \frac{3}{2}pf^2 - f^3 + 6\,r\,\frac{\alpha}{a}f^2 + 6\,r\,\frac{\alpha}{a}z^2\right]$$

y que da, finalmente:

$$\beta = \sqrt[3]{-l + \sqrt{l^2 + k^3}} + \sqrt[3]{-l - \sqrt{l^2 + k^3}} \tag{137}$$



En una sección homogénea, h, la distancia δ entre la fibra neutra y el centro de gravedad está determinada por:

$$\frac{F}{h} - Ff \times \frac{\delta}{I} = O; \quad \delta = \frac{I}{hf}$$

y, como $\beta = \delta + f$,

$$\beta = \delta + \frac{I}{h\delta} = \frac{I + h\delta^2}{h\delta};$$

ó bien:

$$\beta = \frac{I}{hf} + f = \frac{I + hf^2}{hf};$$

es decir, que el brazo de palanca, β, es la relación de momentos de inercia y estático, tomados ambos respecto á la fibra neutra, ó respecto á la fuerza F.

En la sección heterogénea es exactamente lo mismo, salvo que en la evaluación de ambos momentos se prescinde de toda el área sujeta á extensión; y esto es lo que expresa la ecuación (135) si se sustituye x por su valor $\delta + \frac{p}{2}$.

Calculado β, se conoce $x = \beta + \frac{p}{2} - f$; é inmediatamente (134) da ξ, (132) H y (129) (130) y (131) las incógnitas reales H' A' A.

Si de (63) se despeja la excentricidad:

$$f = \frac{-x^3 + \frac{3}{2}px + 12r\frac{\alpha}{a}z^2}{3x^2 + 12r\frac{\alpha}{a}x - 6r\frac{\alpha}{a}p} \qquad (138)$$

y se toma por unidad el peralto p, haciendo $\frac{f}{p} = \varphi$; $\frac{\alpha}{ap} = q$; $\frac{x}{p} = n$, para los valores numéricos, $r = 15$, $\frac{z}{p} = n' = 0,42$, la expresión:



$$\varphi = \frac{-n^3 + 1{,}5\,n^2 + 31{,}75\,q}{3\,n^2 + 180\,q\,n - 90\,q}; \qquad (139)$$

representa una familia de curvas para los distintos valores del parámetro q, cuantía. Construídas estas curvas (que corresponden á la separación de armaduras más usual, ($2z = 0,88\,p$), se evita la resolución, siempre laboriosa, de la ecuación de tercer grado en β. La excentricidad absoluta f y, por tanto, la unitaria, $\frac{f}{p} = \varphi$, es un dato; q, otro; se obtiene en el gráfico la profundidad n de la fibra neutra y, por tanto, $x = n\,p$ y, eliminando ξ:

$$H' = \frac{H}{\xi}\,x = \frac{2\,F\,x}{a\,x^2 + 30\,\alpha\,(2\,x - p)} \qquad (140)$$

$$A' = 15\,F\,\frac{2\,z - p + 2\,x}{a\,x^2 + 30\,\alpha\,(2\,x - p)} = F\,\frac{30\,x - 2{,}4\,p}{a\,x^2 + 30\,\alpha\,(2\,x - p)} \qquad (141)$$

$$A = 15\,F\,\frac{2\,z + p - 2\,x}{a\,x^2 + 30\,\alpha\,(2\,x - p)} = F\,\frac{27{,}6\,p - 30\,x}{a\,x + 30\,\alpha\,(2\,x - p)} \qquad (142)$$

La expresión (138) es general, cualquiera que sea x. Para que $x = p$, es decir, para que se esté en la fase intermedia entre los casos *I* y *II*, presiones variables hasta hacerse nulas en una fibra extrema, resulta:

$$f = \frac{p}{6} \times \frac{1 + 24\,r q n'^2}{1 + 2\,r q} \qquad (122)$$

condición ya encontrada en el caso *I*, y que, numéricamente, para $n' = 0{,}42$, $r = 15$, es

$$\varphi_1 = \frac{1}{6} \times \frac{1 + 63{,}50\,q}{1 + 30\,q} \qquad (143)$$

deducida de (139) haciendo $n = 1$.

En resumen, para:



$\varphi = O$, $x = \infty$; compresión uniforme.

$\varphi \begin{smallmatrix} > O \\ < \varphi_1 \end{smallmatrix}$, $x \geq p$; compresión variable.

$\varphi \geqq \varphi_1$, $x < p$; compresión y tensión.

$\varphi = \infty$, $x = x_1$; flexión sencilla.

En el caso que nos ocupa, compresión y tensión, ($\varphi > \varphi_1$), sólo se pueden alcanzar determinadas cargas límites, H, (compresión), A, (tensión), para ciertos valores de la excentricidad unitaria $\frac{f}{p} = \varphi$. En efecto, sustituyendo en (129) y (131) $H' = 45$, $A = 1.200$ kilogramos por centímetro cuadradrado, $z = 0{,}42\,p$, resulta:

$$x = 0{,}331\,2\,p;\ \text{ó}\ n = 0{,}331\,2.$$

que, introducido en (139), da:

$$\varphi_c = \frac{0{,}128 + 31{,}75\,q}{0{,}329 - 30{,}38\,q} \tag{144}$$

ó bien:

$$q_c = \frac{0{,}329\,\varphi - 0{,}128}{30{,}38\,\varphi + 31{,}75} \tag{145}$$

Hay, pues, una excentricidad crítica, φ_c, cuyo mínimo es $\frac{0{,}128}{0{,}329} = 0{,}389$. Mientras $\frac{f}{p}$ no supera ese valor, la carga de la armadura inferior no puede alcanzar el límite 1.200 al mismo tiempo que H' alcanza el suyo de 45 kilogramos por centímetro cuadrado. Para una excentricidad mayor que la crítica, hay también una sola cuantía crítica, dada por (145), para la que A y H' son simultáneamente los límites prácticos. Por bajo de q_c, para $H' = 45$, A es forzosamente < 1.200; por encima de q_c, para $A = 1.200$, H' resulta inferior á 45. Así, pues, la cuantía debe ir creciendo con la excentricidad, pero no conviene exceder de la crítica q_c.



La armadura superior es, como todas las de compresión, poco eficaz; su carga límite, suponiéndola colocada en la misma fibra extrema, sería $15 \times 45 = 675$ kilogramos por centímetro cuadrado.

Los gráficos (146) y (147) que siguen, reproducen las curvas:

Gráfico (146).

$$\varphi = \frac{-n^3 + 1{,}5\,n^2 + 31{,}75\,q}{3\,n^2 + 180\,q\,n - 90\,q} \qquad (139)$$

Se refieren ambos al caso presente: el segundo es una parte del primero en mayor escala, para evitar la confusión. Cada valor de q individualiza una curva, representada tomando como abscisas los valores de la excentricidad unitaria, $\varphi = \frac{f}{p}$, dato, y por ordenadas los de $\frac{x}{p} = n$, profundidad unitaria de la fibra media y principal incógnita.



Gráfico (147)

φ alcanza hasta 3,0; n, solamente hasta 1,0, á partir del cual se entra en el caso I, de compresiones variables.

Todas las curvas tienen una asíntota común, la línea correspondiente á $q = o$, $\varphi = \frac{-n + 1,5}{3}$; y, además, cada una posee otra asíntota horizontal, cuya ordenada es la n_1 de la flexión sencilla.

Cuando la fuerza F es una tensión, el análisis es idéntico. La figura 42 se refiere, como sus homólogas, al caso

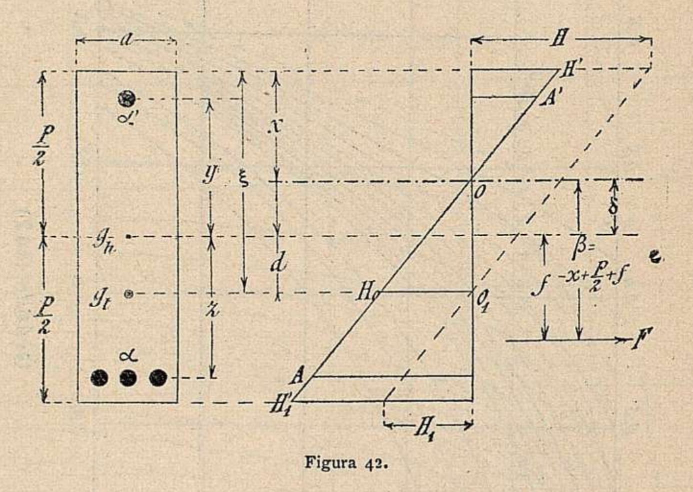


Figura 42.

general de armadura disimétrica. Limitándonos al caso práctico de la simetría ($\alpha' = \alpha$, $y = z$, $g_h = g_t$), se reproducen, una por una, las ecuaciones (129) á (134), sin más variación que el cambio de signo de F. La eliminación de ξ conduce á la expresión:

$$x^3 - 3\left(\frac{p}{2} + f\right)x^2 - 12\,r\,\frac{\alpha}{a}\,f\,x + 6\,r\,\frac{\alpha}{a}\,(f\,p - 2\,z^2) = O \qquad (149)$$

que sólo difiere de (135) en el cambio de signo de f; y, despejado éste, resulta análogamente:



$$-f = \frac{-x^3 + \frac{3}{2} p x^2 + 12 r \frac{\alpha}{a} z^2}{3 x^2 + 12 r \frac{\alpha}{a} x - 6 r \frac{\alpha}{a} p} \qquad (150)$$

y, tomando p por unidad y numéricamente:

$$-\varphi = \frac{-n^3 + 1{,}5\, n^2 + 31{,}75\, q}{3 n^2 + 180\, q\, n - 90\, q} . \qquad (150)$$

Estamos, por tanto, en el mismo caso, salvo el signo de φ. El gráfico (148) representa esa familia de curvas de

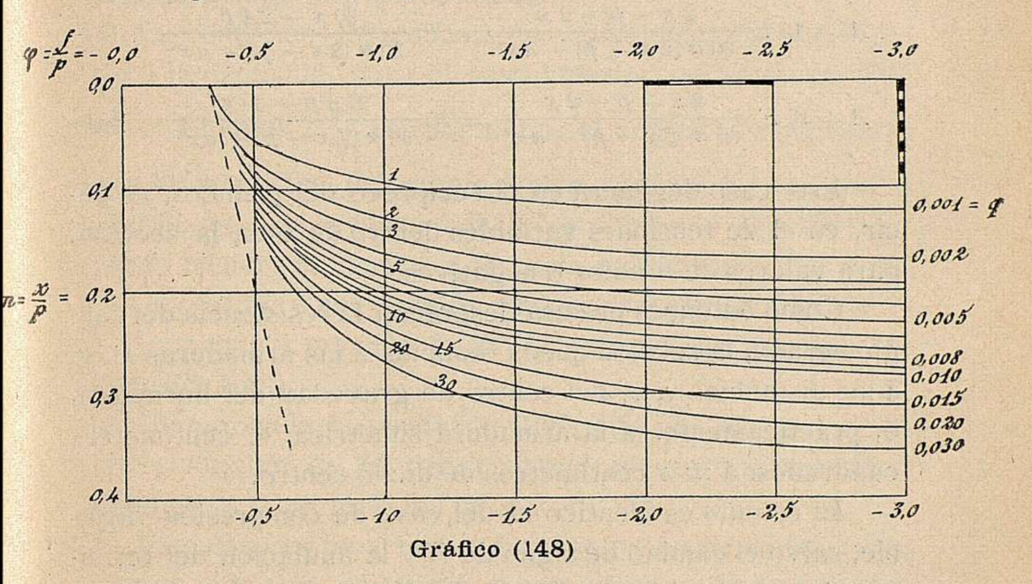
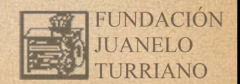


Gráfico (148)

tercer grado, que no son sino las continuaciones de las ya conocidas, del otro lado del eje de las n.

Todas ellas convergen en un punto: $n = O$; $-\varphi = \frac{31{,}75}{90}$;

lo que es lógico: para $n = O$, todo el hormigón está extendido, y como prescindimos de su resistencia, la excentricidad á que corresponde dicha n es la misma, por la simetría de la armadura, sea cualquiera su cuantía. La tangente en ese



punto es también necesariamente la misma para todas las curvas. Cada una de éstas posee la misma asíntota horizontal que su homóloga para φ positivo, la recta relativa á la flexión sencilla.

El valor de n, ó de x, se obtiene, con la misma facilidad que antes, por el gráfico (148), y del mismo modo resultan, cambiando el signo de F:

$$H' = \frac{2\,F\,x}{30\,\alpha\,(2\,x - p) - a\,x^2} \tag{152}$$

$$A' = 15\,F\,\frac{2\,z - p + 2\,x}{30\,\alpha\,(2\,x - p) - a\,x^2} = F\,\frac{30\,x - 2{,}4\,p}{30\,\alpha\,(2\,x - p) - a\,x^2} \tag{153}$$

$$A = 15\,F\,\frac{2\,z + p - 2\,x}{30\,\alpha\,(2\,x - p) - a\,x^2} = F\,\frac{27{,}6\,p - 30\,x}{30\,\alpha\,(2\,x - p) - a\,x^2} \tag{154}$$

Este caso degenera en el recíproco del primero, es decir, en el de tensiones variables dentro de toda la sección, para valores de n nulos ó negativos.

Como entonces precisa despreciar la resistencia del conglomerado, la sección queda reducida á las armaduras α', α, á las distancias y, z, del centro de gravedad del hormigón, ó, prácticamente, á la armadura simétrica, α, centímetros cuadrados, á $\pm\,z$ centímetros de dicho centro.

El cálculo es idéntico al del caso de compresión variable, salvo el cambio de signo de F y la anulación del término ap, sección del conglomerado. Resultan, además de las expresiones (116) y (117)

$$F = \frac{H}{p} \times 2\,r\,\alpha\,(2\,x + p) \tag{155}$$

$$M_{(gh)} = 2\,\frac{H}{p} \times 2\,r\,\alpha\,z^2 \times \frac{1}{100} \tag{156}$$

$$f = 100\,\frac{M}{F} = 2\,\frac{z^2}{2\,x + p};\; x = \frac{z^2}{f} - \frac{p}{2} \tag{157}$$



Para que se verifique este caso y no haya compresión ninguna, precisa que $x \gtreqless O$, es decir, que

$$\frac{f}{p} = \varphi \leq 2 \frac{z^2}{p} \tag{158}$$

cualquiera que sea la cuantía simétrica, q. Nótese al comparar las figuras 42 y 40, esta última aplicable al caso presente, que los sentidos en que se cuenta x, siempre á partir de la fibra superior, son opuestos.

La condición (158) es, como no podía menos de ser, idéntica á la deducida, para el caso anterior, al hacer en (150) $x = O$. El valor $2 \frac{z^2}{p}$ es, por tanto, el crítico, que señala el paso de una forma de trabajo á otra, cualquiera que sea la cuantía. Si φ es menor, toda la sección está extendida, y cuanto menor sea, menor diferencia habrá entre A y A'. Si φ es mayor, hay una zona de compresiones tanto más extensa y con mayor máximo de H' cuanto más excéntrica obre la tensión total.

Comprobada la condición (158), (157) da el valor de x, (155) el auxiliar de H, carga virtual que correspondería al hormigón y (116), (117) los de A y A'.

Este caso es muy importante: se presenta en los tubos de gran diámetro, en los que el peso propio y la desigualdad de presión interior del punto más bajo al más alto provocan flexiones considerables, además de las tensiones generales.



III

Método gráfico.

El cálculo numérico, fácil con las simplificaciones relativas á la sección rectangular de armadura simétrica, sería complicadísimo y prácticamente inabordable para una sección de un solo eje de simetría y de armaduras múltiples. El procedimiento gráfico resuelve el problema de un modo sencillo y completamente general.

Todo estriba en conocer la posición de la fibra neutra y siempre en la hipótesis fundamental de prescindir, para su determinación, de la zona de hormigón sujeta á tensiones.

De un modo general se demuestra en Mecánica que el brazo de palanca entre una fuerza y la fibra neutra correspondiente es el quebrado: $\frac{\text{momento de inercia}}{\text{momento estático}}$, tomados ambos, bien respecto á aquélla, bien respecto á ésta.

Sea, (fig. 43), una sección sometida á una fuerza F, dividida en zonas normales á su eje de simetría, 4, 5, 6, 7, 8, y armada con órdenes de barras 1, 2, 3. Representemos las áreas elementales, h, $r\alpha$, en centímetros cuadrados, por líneas, dividiéndolas por una base de reducción, B centímetros. Numeremos las líneas de acción, empezando por las $r\alpha$ más distantes de F, continuando con ellas, sin h alguna, hasta la más próxima, y prosigamos la numeración por las zonas h desde la más cercana á F hasta la más distante.

Construído con una distancia polar Δ centímetros, un polígono de fuerzas 0123, ($r\alpha$), 45678, (h), tracemos un funicular O, I, II... VII, $VIII$. Una horizontal cualquiera, s, determina entre el lado inicial prolongado, O O y el lado



VI, un segmento, σ, que, multiplicado por Δ, mide la suma de momentos de todas las fuerzas 1, 2 ... 5, 6, respecto á dicha línea *s*.

Figura 43.

El área limitada por σ y por el contorno del funicular *O*,

$I \ldots V$, VI, multiplicada por 2Δ, mide el momento de inercia respecto á la horizontal, s, del sistema de fuerzas 1, 2... 5, 6.

Si s es la fibra neutra, debe resultar:

$$\beta = \frac{I}{M} = \frac{2\Delta \times \text{área}\,(\sigma O I \ldots V\,VI)}{\Delta \times \sigma}$$

ó bien:

$$\frac{1}{2}\,\beta \times \sigma = \text{área}\,(\sigma O I \ldots V\,VI)$$

El primer miembro es el área del triángulo de base σ y altura β, formado al unir la intersección de F y OO con la de s y VI. Este área y la $(\sigma O I \ldots V\,VI)$ tienen una parte común; para que se igualen precisa que los respectivos restos, que aparecen rayados, sean equivalentes.

Basta medir la de la derecha de OO y por el punto $(F - OO)$ tirar una recta que determine igual área; problema sencillísimo.

Por la ordenación particular de las fuerzas representativas de las secciones (armaduras inferiores á superiores, hormigón superior á inferior), en la determinación de σ intervienen *todas* las barras y *solamente* las zonas de hormigón por encima de la fibra neutra.

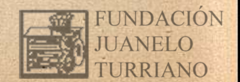
Determinado β y, por tanto, x, y, z:

$$H' = (F\beta) \times \frac{x}{I} = F \times \frac{I}{M_e} \times \frac{x}{I} = \frac{Fx}{M_e}$$

y como el momento estático, $M_e = \Delta\sigma$

$$H' = \frac{Fx}{\Delta\sigma} = \frac{x}{\Delta} \times \frac{F}{\sigma}\ (\text{kg/cm}^2) \qquad (159)$$

$$A' = \nu H' \frac{y}{x} \quad \text{»} \qquad (160)$$



$$A = rH' \frac{z}{x} \text{ (kg/cm}^2\text{)} \qquad (161)$$

Si la escala del dibujo es $\frac{1}{e}$, el área representada por σ es

$$\sigma \text{ (cm.)} \times e \times B \text{ (cm.)}$$

El procedimiento es absolutamente general, salvo la restricción, relativa á los sólidos heterogéneos y virtuales, de que exista un eje principal. Cuando las armaduras están dispuestas en distintos órdenes, se puede calcular la carga correspondiente á cada una midiendo la y ó z respectiva. Y si las armaduras son de gran sección, caso en el que convendría descomponer ésta en varias zonas para obtener mayor exactitud en el trazado, se puede calcular la carga en los diversos puntos de aquélla.

IV

Cálculo inductivo.

Todo lo dicho supone previamente determinadas las formas y dimensiones del hormigón y de sus armaduras. Así hay que proceder siempre, mediante tanteos, porque la flexión compuesta se presenta en las construcciones estáticamente indeterminadas, en las que para conocer los momentos, esfuerzos normales y transversales, es imprescindible acudir al cálculo de las deformaciones.

Existe un método de cálculo deductivo aproximado, gracias al cual los tanteos se simplifican bastante: puede servir como inductivo.

Prescindamos por el momento de la armadura, supo-



niendo provisionalmente aplicable la ley de Hooke á todo el hormigón. Bajo la fuerza F kilogramos con excentricidad f centímetros, (fig. 44), las cargas máximas son:

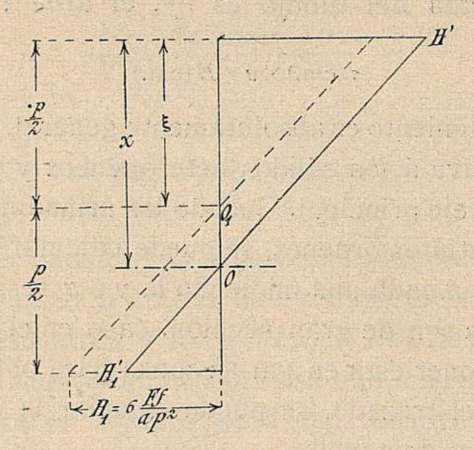


Figura 44.

$$H' = \frac{F}{a\,p} + F f \times \frac{6}{a\,p^2} \qquad (162)$$

$$H'_1 = \frac{F}{a\,p} - F f \times \frac{6}{a\,p^2} \qquad (163)$$

La tensión total T, desarrollada de la fibra neutra abajo, es:

$$T = a\,\frac{p - x}{2} \times H'_1.$$

Sustituyendo el valor de $p - x$ en función de $\frac{p}{2}$ y de la carga $H_1 = F\,f \times \frac{6}{a\,p^2}$ que correspondería á la flexión sencilla:

$$p - x = \frac{p}{2} \times H'_1 \times \frac{a\,p^2}{6} \times \frac{1}{F f},$$

$$T = (H'_1)^2 \times \frac{a^2\,p^3}{24\,F\,f} \qquad (164)$$



Suponiendo ahora que esa tensión, que el hormigón es incapaz de soportar, está equilibrada únicamente por las barras inferiores, de sección α, de una armadura simétrica, su carga será $A = \frac{T}{\alpha}$; la de las barras superiores mucho menor desde luego.

Este método, puramente de tanteo, conduce á valores de H' bastante aproximados á los que da el cálculo exacto; los de A resultan mucho mayores. Se presta muy bien al tanteo en la forma siguiente:

Supuestos, aunque sea de un modo grosero, los valores de F, (compresión total) y de $F\,f$, (momento en centímetros-kilogramos), ó bien de M, (metros-kilogramos) $= \frac{F f}{100}$, la expresión (162) da:

$$a p = h = \frac{F}{H'}\left(1 + 6\,\frac{f}{p}\right) = \frac{F + \frac{600\,M}{p}}{H'} \qquad (165)$$

y eliminando H'_1 entre (163) y (164):

$$T = \left[\frac{F}{a\,p}\left(1 - 6\,\frac{f}{p}\right)\right]^2 \times \frac{a^2\,p^3}{24\,F f} = \frac{F\,p}{24\,f}\left(1 - 6\,\frac{f}{p}\right)^2;$$

$$\alpha = \frac{T}{A} = \frac{F}{A} \times \frac{p}{24\,f}\left(1 - 6\,\frac{f}{p}\right)^2 = \frac{p}{A} \times \frac{\left(F - 600\,\frac{M}{p}\right)^2}{2\,400\,M} \qquad (166)$$

Cada valor atribuído á p da fácilmente las secciones $a p$ y α.

Ejemplo.—Sea $F = 100.000$ kilogramos; $f = 50$ centímetros, y $M = 50.000$ metros-kilogramos. Supongamos $p = 150$ centímetros.

$$a\,p = h = \frac{100.000}{45}\left(1 + 6 \times \frac{50}{150}\right) = 2.222 \times 3 = 6.666 \text{ cm.}^2$$



$$a = \frac{6.666}{150} = 44,4 \text{ ó } 45 \text{ cm.}$$

$$\alpha = \frac{100.000}{1.200} \times \frac{150}{24 \times 50}\left(1 - 6\,\frac{50}{150}\right)^2 = \frac{3.000}{288} = 10,41 \text{ cm}^2.$$

Pongamos 3 barras de 2,0 centímetros; $\alpha = 9,42$ centímetros cuadrados, $q = \frac{9,42}{45 \times 150} = 0,001\ 25$ y comprobemos: $\frac{f}{p} = 0,333$; el gráfico (147) da, por interpolación, $n = 0,6$, ó $x = 90$ centímetros; y de (140) resulta:

$$H' = \frac{2 \times 100.000 \times 90}{45 \times 8.100 + 28,26\,(180 - 150)} = 49 \text{ kg/cm}^2.$$

Hay que rebajar algo H': hagamos $a = 50$ centímetros, $ap = 7.500$ centímetros cuadrados y $q = 0,001\ 12$; $n = 0,59$; $x = 88$ centímetros.

$$H' = \frac{2 \times 100.000 \times 88}{50 \times 7.744 + 28,16\,(176 - 150)} = 45,3 \text{ kg/cm}^2.$$

$$A' = 100.000\,\frac{30 \times 88 - 2,4 \times 150}{387868} = 588 \text{ kg/cm}^2$$

$$A = 100.000\,\frac{27,6 \times 150 - 30 \times 88}{387868} = 413 \quad \text{»}$$

Las armaduras se colocarán á $\pm 0,42 \times 150 = \pm 63$ centímetros del centro, ó á 12 del tradós é intradós.

Comparemos dichas cargas con las que á la misma sección corresponderían si la flexión fuera sencilla.

La ecuación (61), para $c = 150 - 12 = 138$ centímetros, y $n'' = \frac{12}{138} = 0,087$, daría:

$$n = -30 \times 0,00112 + \sqrt{0,0336^2 + 0,0336 \times 1,087} = 0,16;$$



$$n' = 0{,}16 - 0{,}09 = 0{,}07;$$

$$\frac{3\,n - n^2}{6} = 0{,}076;\ rq\ \frac{n' - nn' + n'^2}{n} = 0{,}006$$

$$H' = 100 \times \frac{50.000}{50 \times 150^2} \times \frac{1}{0{,}076 + 0{,}006} = 54{,}2 \text{ kg/cm}^2.$$

A primera vista parece esto inadmisible, tanto más, cuanto que la carga A resulta de $15\ \frac{1 - 0{,}16}{0{,}16}\ 54{,}2 = 4.268$ kilogramos por centímetro cuadrado. Sin embargo, se explica perfectamente: con la pequeña cuantía de 0, 001 12, $n = 0{,}16$ y el 84 por 100 de la sección de hormigón es, según la base de cálculo $H_{rt} = O$, completamente inútil; el momento de 50.000 metros-kilogramos es contrarrestado solamente por una pequeña altura de hormigón y por unas barras de escasísima área; las cargas son forzosamente muy altas, en particular la de tensión A.

Al considerar, además de ese momento, la compresión total de 100.000 kilogramos, la profundidad de la fibra neutra pasa de 0,16 á 0,59; entra en juego un área de hormigón casi tres veces mayor, lo que basta para rebajar su carga máxima unitaria, aunque la compresión total desarrollada aumente en una parte considerable de los 100.000 kilogramos; y al mismo tiempo, el resto de estos 100.000 kilogramos comprimen, relativamente, las barras inferiores y rebajan muchísimo su carga unitaria de tensión.

No hay, pues, congruencia entre los dos casos: la pieza de gran área y escasa cuantía que se amolda muy bien á la flexión compuesta, en la que predomina el trabajo de compresión, resulta inadmisible para la flexión sencilla, en la que tienen igual importancia compresión y tracción totales; le sobra hormigón y le falta armadura. Para el mismo momen-

12



to y altura determinaríamos una sección apropiada haciendo, por ejemplo, (q=0, 007 5):

$$\frac{M}{\mu_1} = \frac{50\,000}{10} = 5.000 = \alpha c = \alpha\,(150 - 12);\ \alpha = 36{,}25 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{\alpha}{q c} = \frac{36{,}25}{0{,}0075 \times 138} = 35 \text{ cm.}$$

La sección total sería $ap = 35 \times 150 = 5.250$ centímetros cuadrados con armadura asimétrica, doble de la total anterior, 18,84, pero con un volumen de hormigón dos tercios de aquél.

Importa consignar que es preciso asegurarse de la resistencia al pandeo; el par Ff, (centímetros-kilogramos), no ejerce acción transversal, pero la fuerza F puede provocar la flexión. Aunque parece lógico suponerla, para ese efecto, repartida sobre toda la sección, es más prudente admitir que se distribuye solamente en la zona comprimida.

Así, en el ejemplo, supondremos que afecta á una zona de 50×88 centímetros $= 4.400$ centímetros cuadrados, dando una carga de 22,27 kilogramos por centímetro cuadrado.

El cuadro (44) relativo al pandeo, indica como admisible una esbeltez de 28; la longitud del trozo de pieza entre riostras que determinen un nudo, puede, por tanto, alcanzar á 14 metros para $k = 1$.



CAPÍTULO VI

CARGAS TRANSVERSALES

I

Estudio general.

Se demuestra en Mecánica, por la consideración de un paralelepípedo elemental de longitud finita, a, (anchura de la pieza á la altura y sobre la fibra neutra) y de dimensiones dy, dl, ambas paralelas al plano de simetría de la misma, (fig. 45):

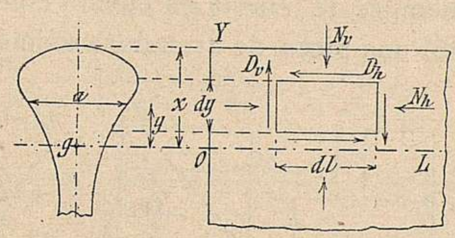
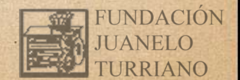


Figura 45.

1.° Las cargas unitarias de desgarramiento, según planos verticales y horizontales, perpendiculares al de simetría, son siempre una misma: $D_v = D_h = D$ en general.

2.° La carga unitaria de compresión ó tensión, paralelamente al eje de la pieza, tiene la expresión conocida $N_h = y \times \frac{M}{I} = \frac{M}{\frac{I}{y}}$, con el signo de y.



3.° La carga unitaria de desgarramiento es:

$$D = \frac{1}{a} \times \frac{dM}{dl} \times \frac{1}{I} \int_y^x a\,y\,d\,y = \frac{E}{a} \times \frac{1}{I} M_e \qquad (167)$$

en la que x es la altura de la fibra superior sobre el eje OL, fibra neutra; a, la anchura, constante ó variable, á la altura, y, considerada; I, el momento de inercia de la sección total, M_e, el momento estático respecto á OL de la zona de altura $(x - y)$ y E el esfuerzo cortante.

4.° La carga unitaria de compresión ó tensión, normalmente al eje de la pieza, N_v, definida por la ecuación diferencial: $d\,N_v = - d\,D \times \frac{dy}{dl}$ tiene una importancia muy escasa, particularmente en el caso usual en que las sobrecargas actúan sobre la cara superior de la pieza. Aun en los puentes con piso inferior, en que la carga N_v es una tensión, se prescinde siempre de tenerla en cuenta en el cálculo.

Sea (fig. 46) una pieza de armadura asimétrica, á cuya

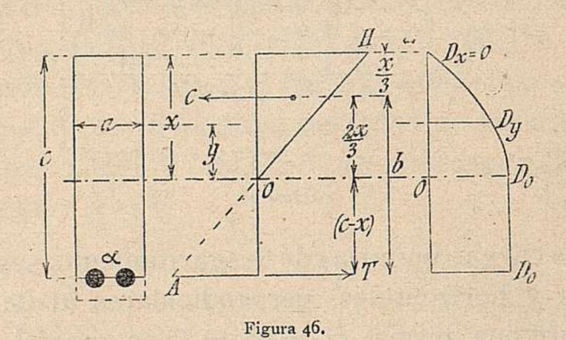
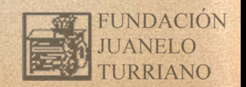


Figura 46.

sección sustituímos la virtual equivalente, sobre la base (φ) de prescindir en absoluto del hormigón inferior á la fibra neutra.

D varía en proporción inversa de la anchura a y directa



de M_e, momento estático de la zona de altura $(x - y)$. Para $y = x$, fibra superior, $D_x = O$.

Para los límites de y, desde O á x, (fibra neutra):

$$I = \int_o^x a\,dy \times y^2 + r\alpha\,(c - x)^2;\; M_{e_o} = \int_o^x dy \times y;$$

y si a es constante:

$$I = \frac{a\,x^3}{3} + r\alpha\,(c - x)^2;\; M_e = \frac{a\,x^2}{2}$$

$$D_0 = \frac{E \times \frac{a\,x^2}{2}}{a\left(\frac{ax^3}{3} + r\alpha\,(c - x)^2\right)}$$

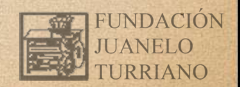
La profundidad del centro de gravedad, x, está definida por $\frac{ax^2}{2} = r\alpha\,(c - x)$; el denominador se transforma, por tanto, en

$$a\left(\frac{ax^3}{3} + \frac{ax^2}{2}\,(c - x)\right) = a \times \frac{ax^2}{2}\left(c - \frac{x}{3}\right);$$

y:
$$D_0 = \frac{E}{a} \times \frac{1}{c - \frac{x}{3}} = \frac{E}{a\,b} = \frac{E}{a\,c} \times \frac{3}{3 - n} \qquad (168)$$

introduciendo el brazo de palanca, $b = c - \frac{x}{3} = \frac{3 - n}{3}\,c$ entre la compresión y tensión totales, C, T.

Por bajo de la cifra neutra, el hormigón no desarrolla ninguna reacción elástica, N_h, puesto que suponemos $H_{rt} = O$; el momento estático M_e es el mismo, $\frac{ax^2}{2}$, correspondiente á la fibra neutra, y D sólo depende de la anchura a. Si ésta es constante, (sección rectangular), de la fibra neutra hacia abajo reina la misma carga D_o, hasta llegar á la armadura,



cuya tensión, transmitida al hormigón por la adherencia, la equilibra. Si la anchura disminuye gradual ó bruscamente hasta a_1, (tes), la carga pasa del mismo modo de D_o á $D_o \times \frac{a}{a_1}$ manteniéndose constante mientras a_1 lo sea, hasta anularse al llegar á la armadura.

La línea representativa de las cargas D, es una curva, ó polígono, (según sean nulas ó graduales, ó bien, bruscas, las variaciones de anchura) entre la fibra superior y la neutra, y otra curva, ó polígono, desde esta última hasta la armadura. En la sección rectangular, una curva, (parábola), prolongada por una vertical.

En una longitud λ de pieza hay, por tanto, un esfuerzo total de desgarramiento, paralelo al eje de aquélla, $D_o \times a\,\lambda$, equilibrado por la resistencia del hormigón, $H_{rd} \times a\,\lambda$, en general. Al nivel de la armadura, llamando Σp la suma de perímetros de las barras, la tendencia al deslizamiento de éstas, es:

$$D_\alpha = D_o \times \frac{a}{\Sigma p} \text{ (kg/cm}^2\text{)} \qquad (169)$$

Y si componen aquélla m barras, de diámetro d, se producirá un esfuerzo total que no debe, prácticamente, superar al límite $H_\alpha = 4{,}5$ kilogramos por centímetro cuadrado, multiplicado por la superficie lateral $m\,\pi\,d \times \lambda$. Tenemos, pues,

$$4{,}5\, m\,\pi\, d \geq a\, D_o = \frac{E}{b} \qquad (170)$$

expresión sencillísima que nos va á dar los límites prácticos para distribuir la armadura de sección α, ya calculada, en barras de ciertos diámetros.

El brazo de palanca $b = c - \frac{x}{3} = c\left(1 - \frac{n}{3}\right) = c\,\frac{3-n}{3}$,



varía con la profundidad unitaria, n, de la fibra neutra. Tomemos para más sencillez el mínimo de b, que corresponde al máximo de n, y para mayor seguridad exageremos, suponiendo $n = 0{,}50$, ó $b = \frac{5}{6} c$.

En general, como el esfuerzo cortante, E, es $\frac{d\,M}{d\,l}$, se puede expresar el máximo momento flector, M_m, correspondiente á sobrecarga uniforme, en función del máximo esfuerzo cortante, E_m, en la forma $M_m = \frac{l}{k} \times E_m$, siendo k una constante para cada disposición de los apoyos, simples, con empotramiento, semiempotramiento, etc., etc. Como M_m lo expresamos siempre en metros-kilogramos, l, luz del vano, será un número de metros.

La armadura, $\alpha = m \times \frac{\pi\,d^2}{4}$, está determinada por

$$M_m = \mu_1 \times \alpha\, c = \mu_1 \times m \frac{\pi\,d^2}{4} \times c,$$

de donde resulta la suma de perímetros:

$$m\,\pi\,d = 4\,\frac{M_m}{\mu_1} \times \frac{1}{d\,c} = 4\,E_m \times \frac{l}{k} \times \frac{1}{\mu_1\,d\,c}.$$

La condición (166) se transforma considerando el máximo de D_o, ó de E, en:

$$4{,}5 \times 4\,E_m\,\frac{l}{k} \times \frac{1}{\mu_1\,d\,c} \geq \left(a\,D_o = \frac{E}{b} = \frac{6\,E_m}{5\,c}\right);$$

$$d \leq 15\,\frac{l}{k\,\mu_1} \qquad (171)$$

Para los valores extremos é intermedio del momento práctico μ_1, resulta:



DISPOSICIÓN DE LA PIEZA	k	$\frac{d}{l} \leq$		
		$\mu_1 = 6$	$\mu_1 = 9$	$\mu_1 = 11$
Simple apoyo................	4	0, 625	0, 417	0, 341
Semiempotramiento..........	5	0, 500	0, 333	0, 273
Empotramiento..............	6	0, 417	0, 278	0, 227
Voladizo	2	1, 250	0, 833	0, 682
Idem con carga en el extremo..	1	2, 500	1, 667	1, 363
Tres tramos continuos........	10	0, 250	0, 167	0, 136
Más de tres ídem.............	11,5	0, 217	0, 145	0, 118

(172)

Recordemos que d representa centímetros y l la luz en metros. Así, para un vano de 9 metros, con semiempotramiento y para cuantía que dé $\mu_1 = 9$, las barras no deberán pasar de $0,278 \times 9 = 2,5$ centímetros de diámetro, sopena de que sobre los apoyos, donde E alcanza su máximo, la tendencia al deslizamiento de la armadura supere el valor práctico prudentemente adoptado, de 4,5 kilogramos por centímetro cuadrado.

Es posible, sin embargo, dar mayores diámetros, á condición de *anclar* los extremos de las barras dentro del hormigón, como veremos. Y esto se hace imprescindible cuando, como es muy usual, algunas de las m barras han sido levantadas y faltan en la parte inferior de la viga en las zonas de mayores esfuerzos cortantes. Precisa entonces comprobar directamente el valor de la tendencia al deslizamiento D_α por la expresión (169).

Si en la zona comprimida existe armadura, la ecuación



general (167) es igualmente aplicable al sólido virtual, sin más diferencia que la de comprender en el momento estático M_e, además de lo correspondiente al hormigón, lo relativo á la armadura α' colocada á la altura y' sobre la fibra neutra, es decir, el término $r\,\alpha'\,(y'-y)$, desde $y=y'$ hasta $y=O$. D sufre un incremento brusco, al llegar á la armadura α', originado por la compresión de ésta transmitida por adherencia al hormigón.

Con las notaciones acostumbradas, el momento estático respecto á la fibra neutra es

$$M_{e_o} = a\,n\,c \times \frac{n\,c}{2} + r\,\alpha' \times n'\,c = \frac{a\,n^2\,c^2}{2} + 15\,\alpha'\,n'\,c\ ;$$

el de inercia:

$$I = a\,\frac{(n\,c)^3}{3} + r\,\alpha' \times (n'\,c)^2 + r\,\alpha \times (n\,c)^2\ ;$$

y la máxima carga de desgarramiento:

$$D_o = \frac{M_{e_o}}{I} \times \frac{E}{a} = \frac{3}{2}\,\frac{E}{ac} \times \frac{n^2 + 30\,n'\,q'}{n^3 + 45\,n'^2\,q' + 45\,n^2\,q}\ ;$$

expresión general que para $q' = O$, da la ya conocida, (168), de las piezas asimétricas. Para $n' = 0{,}8\,n$ y dentro de los valores usuales de q, y los correspondientes de n, dicha expresión se reduce, con aproximación por exceso, á:

$$D_o = \frac{2}{2-n} \times \frac{E}{ac} \qquad (173)$$

en las piezas simétricas. En las disimétricas con cuantía superior q' inferior ó igual á $0{,}5\,q$, la expresión de D_o sería intermedia entre (168) y (173), pero conservamos, por sencillez y con error favorable, el mismo valor de las simétricas.



Las ecuaciones (168) y (173) definen los límites de la sección *ac,* impuestos por la condición $D_o \leq 4{,}5$ kilogramos por centímetro cuadrado, que son, respectivamente:

$$ac \geq E \times \begin{cases} \dfrac{2}{9-3n} & \text{(asimétricas)} \\ \dfrac{4}{18-9n} & \text{(simétricas)} \end{cases} \qquad (174)$$

En la tabla (100) al final del volumen, se consignan para cada cuantía, los valores de $(1-n)$; $\dfrac{3-n}{3}$ ó $\dfrac{2-n}{2}$, que dan la relación $\dfrac{b}{c}$; y los de $\dfrac{2}{9-3n}$ y $\dfrac{4}{18-9n}$.

Recordemos nuevamente lo demostrado en Mecánica respecto á los esfuerzos moleculares principales. La resultante de todas las cargas unitarias, D_v, D_h, N_v, N_h, sufridas por un punto de una pieza, bajo la acción de un momento M y de un esfuerzo cortante E, se reduce, en las direcciones orientadas φ respecto á la vertical y definidas por $tg\,2\varphi = -2\,\dfrac{D}{N_h}$, á las *cargas principales:*

$$\left(\frac{N_h}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{N_h^2}{4} + D^2} = P;$$

es decir, para N_h positivo:

$$tg\,2\varphi = -\frac{2D}{N_h};\; C_1 = \frac{N_h}{2} + \sqrt{\frac{N_h}{4} + D^2}, \text{ compresión máxima;}$$

y para N_h negativo:

$$tg\,2\varphi = -\frac{2D}{-N_h};\; T_1 = -\frac{N_h}{2} - \sqrt{\frac{N_h}{4} + D^2}; \text{ tracción máxima.}$$

En esas dos direcciones, $\pm\dfrac{2D}{N_h}$, las cargas P son mayo-



res que en cualquier otra. En las piezas de hormigón armado acabamos de ver que dentro de la hipótesis base (φ), desde la fibra neutra hasta la armadura inferior resultan $N_h = 0$ y $D = D_o$. Las cargas principales corresponden á $tg\, 2\varphi = \pm \infty$, $\varphi = \pm 45°$ y tienen por valor $\pm D_o$.

Eso mismo sucede en las piezas homogéneas, pero nada más que en la fibra neutra, donde únicamente es nulo N_h; y á partir de ella, para valores crecientes y negativos de N_h y decrecientes de D, la carga principal varía desde D_o hasta $-N_h$ en la cara inferior de la pieza, y análogamente desde D_o á N_h en la fibra superior, dentro de la zona comprimida.

Las envolventes de las direcciones φ á lo largo de las cuales $P =$ constante, forman las trayectorias de los máximos esfuerzos moleculares, trazas de las superficies de rotura sobre el plano de simetría de la pieza. La forma de estas trayectorias depende de las variaciones de N_h y de D, ó sea de las de M y de E, ó de la distribución de sobrecargas y forma de sustentación, por apoyo, empotramiento, etc., etc., de la pieza.

En el caso más sencillo, sobrecarga constante y simple apoyo, las trayectorias, que siempre constituyen dos familias de curvas, ortogonales unas respecto á otras, y que todas cortan á 45° la fibra neutra y á 90° las extremas, tienen la forma de la figura 47.

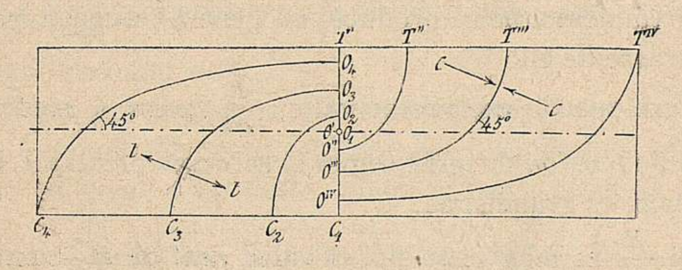


Figura 47.



La rotura por tracción tiende á verificarse á lo largo de las trayectorias de compresión, $C_m O_m$, normalmente á las cuales reinan las cargas de tensión *t*, máximas en la fibra inferior y decrecientes hasta la parte superior de la trayectoria; y viceversa, en las de tensión $T^m O^m$.

En la pieza de hormigón armado, asimétrica, esas trayectorias serían idénticas de la fibra neutra arriba, y, con arreglo á lo dicho, desde la fibra neutra abajo, estarían sustituídas por las tangentes, á 45°, prolongadas. Pero como en realidad la resistencia H_{rt} no es nula, el hormigón soporta ciertas cargas, $H_t = - N_h$, crecientes; D no es constante, sino decreciente á partir de D_o, y las trayectorias reales tienen una forma intermedia; junto á los apoyos, las curvas C se aproximan mucho á la tangente prolongada, porque $- N_h$ es muy pequeño; en la región central se acercan bastante á la curva, porque $- N_h$ es allí la mayor posible.

En suma: el hormigón está inevitablemente sujeto, desde la fibra neutra abajo, á cargas de desgarramiento, cuyo valor, teóricamente constante, es el mismo de la carga por desgarramiento á lo largo de la fibra neutra ó normalmente á la misma, $D_o = \frac{E}{ab} = E \times \frac{3}{(3-n)ac}$.

Este valor resulta en la práctica menor que el límite adoptado para H_{rd}: cuando las piezas están bien proporcionadas, la primera manifestación del esfuerzo cortante, el desgarramiento, no se produce, en general, aunque precisa asegurarse de ello.

Pero cuando ese mismo valor, $\frac{E}{ab}$, pasa á medir una carga de *tensión* dirigida según el esfuerzo principal, la importancia es grandísima.

Si $\frac{E}{ab}$ es muy pequeño, el valor *real* de H_{rt} basta con

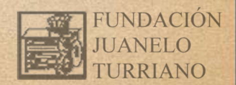


creces para equilibrar á aquél. Tal sucede en los forjados y, en general, en las piezas poco peraltadas, por el gran valor de la anchura a. Prácticamente se prescinde de disponer armaduras secundarias.

Por lo contrario, en las piezas de gran altura, y particularmente en las T, el ancho a_1 es muy pequeño: la carga principal $\frac{E}{a_1 b}$ se acerca, iguala y hasta supera al valor real de H_{rt}, y es imprescindible, aun en el primer caso, alejar el peligro de rotura del hormigón, equilibrando directamente por medio de armaduras apropiadas, las cargas principales de tensión.

Así, por ejemplo, en un vano de 4 metros, para un peso total de 500 kilogramos por metro lineal, $M_m = 1.000$ metros-kilogramos y $E_m = 1.000$ kilogramos. Cualquiera de las piezas del capítulo 4.°, VII, resiste justamente 1.000 metros-kilogramos. Tomemos las de $q = 0,\ 002\ 5$, á las que corresponde $n = 0,\ 24$ y $b = c\ (1 - 0,\ 08) = 0,\ 92\ c$. $\frac{E}{a b} = \frac{1.000}{0,\ 92\ a c}$ vale 0, 30 kilogramos por centímetro cuadrado en la pieza de 10 centímetros de canto, 0, 75 en la de 25 y 1, 50 en la de 50. Si la segunda, de 25 centímetros de altura, de los que sólo 6 trabajan por compresión, se hace en forma de T, reduciendo á partir de la fibra neutra el ancho de 59 centímetros á 8, $\frac{E}{a_1 b}$ será entonces 5, 63 kilogramos por centímetro cuadrado en lugar de 0, 75.

En general, á medida que se aumenta la rigidez de la pieza, forzando el canto, el área, ac, disminuye y en igual escala, mientras q no varíe, aminora ab y crece la carga principal $\frac{E}{a b}$. En las T, equivalentes respecto á la compre-



sión y tensión horizontales á piezas rectangulares, $a\,c$, la carga principal es la correspondiente á la de la pieza $a_1\,c$, descendiendo la anchura del alma, a_1, hasta 0, 10 y 0, 08 de a y aumentando D_o 10 y 12 veces de valor. Cosa análoga ocurre en las secciones rectangulares de fuerte cuantía, que sólo resultan admisibles, por razón del valor D_o, cuando los peraltes son moderados. Ya hemos deducido una expresión (174) que establece el mínimo de $a\,c$ é implícitamente el máximo del peralte $\frac{c}{a}$.

La experimentación confirma plenamente lo hasta ahora deducido de consideraciones racionales. En los forjados y piezas poco peraltadas y sin armaduras secundarias, las grietas producidas al forzar las sobrecargas se manifiestan primero en el centro del vano, dirigidas verticalmente: son las ya estudiadas, debidas tan sólo al agotamiento de resistencia del hormigón extendido bajo la acción de las cargas $(-N_h)$ ó del momento M, en esa zona máximo. En nada influyen las cargas D_o, allí mínimas.

Por lo contrario, en una ⊤ bastante peraltada y de alma estrecha, y á menos que existan armaduras secundarias bien calculadas y distribuídas, antes, á veces, de alcanzar M el valor del cálculo, se producen en las zonas extremas grietas inclinadas á 45°, dirigidas hacia el centro y hacia arriba. Al ir forzando las sobrecargas aparecen nuevas fisuras, análogas á las anteriores, en zonas más próximas al centro y en dirección menos inclinada, y al mismo tiempo las primeras se ensanchan y se prolongan en dos direcciones horizontales, (fig. 48), una al nivel de la armadura, otra al del intradós.

Independientemente de estos fenómenos, debidos á las cargas principales de tensión, D_o, se producen los corres-



pondientes á las cargas $-N_h$, extendiéndose del centro hacia los apoyos.

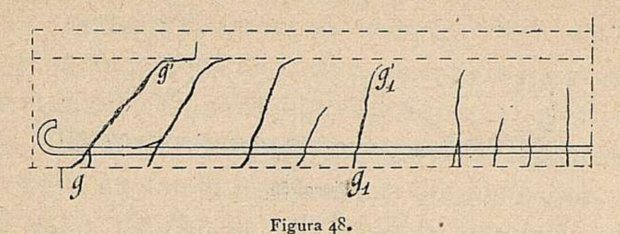


Figura 48.

Producida una de tales grietas, gg' (fig. 49), por haber superado la carga principal, D_o, á la resistencia por tracción H_{rt}, el trozo comprendido entre aquélla y el apoyo, está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas siguientes: 1.°, la reacción R; 2.°, las sobrecargas y peso muerto ΣP, relativas al trozo; 3.°, la compresión total C ejercida sobre

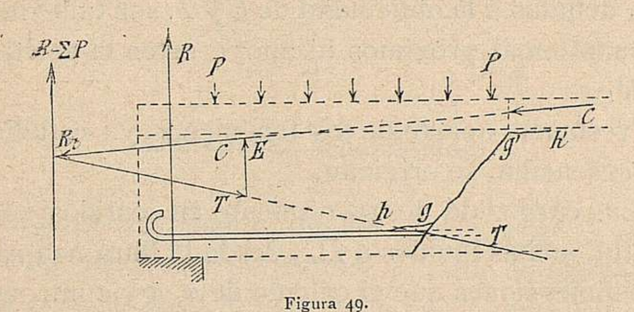
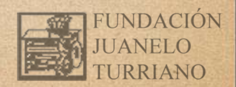


Figura 49.

el forjado ó zona comprimida; 4.°, la tracción total T desarrollada sobre la armadura. El sistema $(R, \Sigma P)$ tiene una resultante $R_t = R - \Sigma P = E$, valor del esfuerzo cortante en la grieta, y su línea de acción es tanto más próxima al apoyo cuanto más cercana esté la fisura y menor sea ΣP.

El equilibrio exige que C y T se corten en un punto de R_t; ambas fuerzas son forzosamente oblicuas, más T que C, porque el ensanche de la grieta se hace (fig. 50), girando los



dos trozos de viga, cada uno alrededor de su apoyo, y el derecho, de mayor longitud, tiende á descender más que el izquierdo.

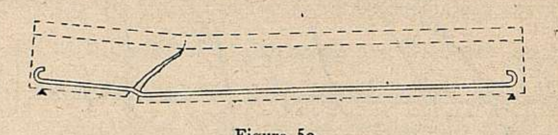


Figura 50.

T provoca la desunión de la armadura y del hormigón, (fig. 49), y de ahí que la grieta tienda á correr horizontalmente hacia el apoyo, prolongándose según $g\,h$. Sobre el trozo derecho, las acciones del izquierdo son iguales y contrarias á T y C, y la antagonista de esta última tiende á despegar el forjado del alma, y de ahí la prolongación de la fisura al nivel del intradós y hacia el centro, $g'\,h'$. Los dos efectos, debidos á la oblicuidad de C y T, son tanto más marcados cuanto más próximos al apoyo estén la grieta y, por tanto, R_t.

En resumen: aparte de los fenómenos ya estudiados en la flexión sencilla, se originan:

1.° Las cargas de desgarramiento en sentidos vertical y horizontal, ambas iguales á D_o, desde la fibra neutra abajo. Con las dimensiones que el cálculo de α, a y c impone y con las prácticamente necesarias para la anchura a_1 del alma, (expresión (170)), esas cargas son bien resistidas.

2.° Una tendencia al deslizamiento de la armadura bajo la acción de la carga horizontal D_o y que se contrarresta eficazmente limitando á ciertos valores los diámetros de las barras que componen la sección α, ó anclando firmemente sus extremos.

3.° Las cargas principales de compresión, también de valor unitario D_o, dirigidas á 45°, ó menos, hacia la región del



centro de curvatura de la pieza deformada y á las que resiste con sobrado huelgo el hormigón.

4.° Las cargas principales de tensión, á 45° ó más con la vertical, y hacia la zona de convexidad de la pieza deformada. Valen también D_o y requieren, cuando la pieza es algo peraltada, ó el alma, en una T, es algo estrecha, armaduras especiales que suplan la insuficiencia del hormigón.

5.° El valor de D_o, de tan decisiva influencia, crece al disminuir la sección útil ac y, por tanto, al aumentar el canto c, (capítulo 4.°, VI). No se debe bajar del límite ac, (en las T, $a_1c) = \frac{2}{3} \frac{E}{3-n}$ (174), lo que equivale á decir que la carga debida al esfuerzo cortante, $\frac{E}{ac}$, ó $\frac{E}{a_1c}$, no debe superar á $\frac{3}{2}$ $(3-n)$ kilogramos por centímetro cuadrado.

II

Armaduras secundarias.

En cada grieta posible (fig. 48), gg' . . g_1g_1' ... se trata de introducir una sección metálica, α'', que equilibre eficazmente la tensión total desarrollada en la superficie gg' ... por la carga principal D_o.

Prácticamente la dirección gg' coincide con la teórica, á 45°, cerca de los apoyos, y se va acercando á la vertical conforme se consideran zonas más próximas al centro: la superficie sobre la que se ejerce D_o va aminorando. Al mismo tiempo, el valor real de D_o, igual allí al teórico, va también siendo menor, por resistir, aunque sea poco, el hormigón, las tensiones $-N_h$. Si consideramos, pues, la dirección y valor teóricos de D_o, exageramos siempre en sentido

favorable, dando á la superficie y á la carga valores más altos que los reales.

El esfuerzo principal P (fig. 51), resultante de la carga uni-

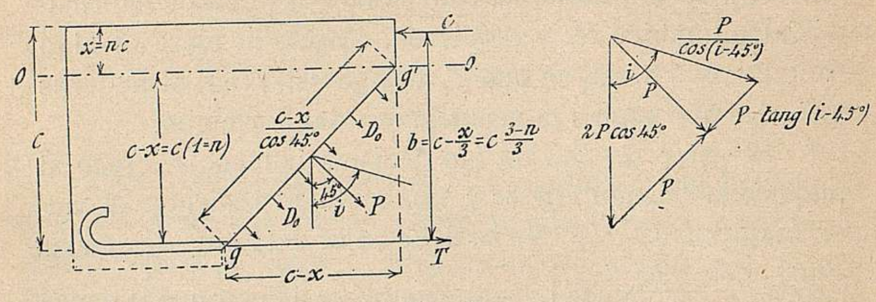


Figura 51.

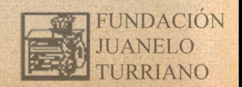
taria D_o sobre una grieta virtual, gg', de área $a\ \frac{c-x}{\cos 45^\circ}$, es:

$$P = ac\ \frac{1-n}{\cos 45^\circ} \times \frac{E}{ab} = \frac{E}{\cos 45^\circ} \times \frac{1-n}{1-\frac{n}{3}} = \frac{3E}{\cos 45^\circ} \times \frac{1-n}{3-n} \quad (175)$$

Podemos contrarrestar P: con elementos verticales, en forma de estribos, ó cercos, (figuras 4, 5 y 6); con elementos inclinados á 45° ó más respecto á la vertical, es decir, con las barras primarias, acodadas ó encorvadas (figuras 9 y 10).

Es preciso que ninguna grieta deje de estar protegida, lo cual requiere que la separación entre dos estribos sea, en el límite, $c-x$, ó prácticamente un poco menor. Así, algunas secciones $g_1 g_1'$ (fig. 53) cortarán dos estribos; pero otras $g\ g'$, trazadas por el medio de $(c-x)$, encontrarán uno solamente.

Con estribos verticales, P (fig. 51), se descompone en una tensión $2P \cos 45^\circ$ vertical, que obra sobre aquéllos y una fuerza, P, dirigida á 45°, hacia arriba, y que tiende á desgarrar el hormigón; su valor unitario es el mismo



$D_o = \frac{E}{ab} = \frac{3E}{(3-n)ac}$. El efecto del estribo es, por tanto, transformar la misma carga, antes de tensión, en una de desgarramiento, que el hormigón soporta en condiciones mucho más favorables.

Si el número de estribos cortados por la grieta virtual gg', ó comprendidos en la longitud $c - x$, es m y están formados por barras de sección ε, la sección total, á que afecta la tensión $2P \cos 45^o$, es $2m\varepsilon = \alpha''$ y la carga unitaria que sufren:

$$A'' = \frac{2P \cos 45^o}{\alpha''} = \frac{6E}{\alpha''} \times \frac{1-n}{3-n} \qquad (176)$$

Cada estribo equilibra una fracción $\frac{1}{m}$ del efecto de P. Si su separación horizontal es $s = \frac{c-x}{m} = (c-x)\frac{2\varepsilon}{\alpha''}$, resulta, eliminando α'':

$$s = c(1-n) \times 2\varepsilon \times \frac{(3-n)A''}{6(1-n)E} = \frac{3-n}{3} \frac{\varepsilon A''}{E} c \qquad (177)$$

y, para $A'' = 1.200$ kilogramos por centímetro cuadrado:

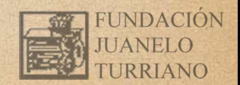
$$s = 400(3-n)\frac{\varepsilon}{E} c \qquad (178)$$

ó bien:

$$\varepsilon = \frac{1}{400(3-n)} \times \frac{E}{c} s \qquad (179)$$

expresiones de la distancia ó separación protegida eficazmente por un estribo de barras ε, (sección total 2ε), ó de la sección de barra, ε, necesaria para proteger la longitud s.

ε es directamente proporcional á E, cuya ley de varia-



ción, curva en general, sustituiremos, para mayor facilidad, cometiendo un error favorable, por un polígono (fig. 52) que la envuelva. Lo práctico es adoptar una sección ε constante

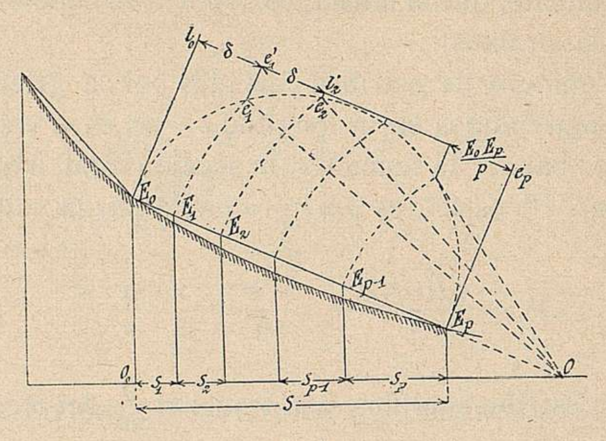


Figura 52.

y acomodar á ella y á las variaciones de E las sucesivas separaciones s.

Para una longitud de pieza, S, relativa á la variación de esfuerzos cortantes $E_o \ldots E_p$, se necesitará un cierto número p de estribos y el total de secciones elementales, $p\varepsilon$, será, por (179):

$$p\,\varepsilon = \frac{1}{400\,(3-n)} \times \frac{E_o + E_p}{2 \times c} \times S \qquad (180)$$

y á una sola corresponderá, en general:

$$\varepsilon = \frac{1}{400\,(3-n)} \times \frac{E_{k-1} + E_k}{2 \times c} \times S_k \qquad (181)$$

tomando como valor de E, relativo á cada distancia, s_k, la media, $\frac{E_{k-1} + E_k}{2}$, de los variables correspondientes.

Como ε es constante, tiene que serlo también el área



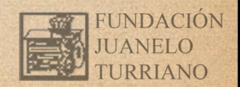
$\frac{E_{k-1}+E_k}{2} s_k$ é igual á $\frac{1}{p}$ del área total $\frac{E_o+E_p}{2}$ S. El problema se reduce á dividir ésta en p áreas iguales, según la sencilla construcción hecha en la figura 52. Dividida en p partes $e_o\, e_p$, paralela á $E_o\, E_p$, y proyectados sobre la semicircunferencia de diámetro $E_o\, E_p$ los puntos de división, en $e_1\, e_2 ...$, se proyectan éstos circularmente desde el centro O, en $E_1\, E_2 ...$; y las paralelas á $O_o\, E_o$ determinan s_1, $s_2 ...$

El cálculo da el producto $(p\varepsilon)$ centímetros cuadrados. Hay que tantear, como siempre, escogiendo una de las indeterminadas, p ó ε. El número p debe ser un múltiplo del número de barras ú órdenes verticales de barras, m, de la armadura principal, α, é igual á mp'; la sección ε debe corresponder á una barra, redonda ó rectangular, fácilmente manejable; y, por último, la separación mínima, s_1, no debe ser muy pequeña, para no hacer difícil el hormigonado.

Lo más práctico es empezar por el mínimo s_1, correspondiente al primer estribo, ó, mejor dicho, grupo de m estribos, tomando $E = E_o$, con lo que se exagera:

$$s_1 = 400\,(3 - n)\,\frac{c}{E} \times (m\,\varepsilon) \qquad (182)$$

dando á ε un valor práctico y tal que s_1 sea, por lo menos, 10 ó 15 centímetros. Proyectado el extremo de s_1 en E_1; de éste, con el radio OE_1, en e_1 sobre la semicircunferencia, y, paralelamente á $E_o\, e_o$, de e_1 en e'_1, se obtiene la distancia $\delta = e_o\, e'_1$, que llevada cuantas veces se pueda sobre la base de división $e_o\, e_p$, da los puntos necesarios para proseguir la construcción. Todas las distancias resultan ligeramente exageradas, por haber tomado $E = E_o$ en lugar de $\frac{E_o + E_1}{2}$ y la última no corresponderá, en general, al extremo E_p,



sino á un esfuerzo algo menor, en nada de lo cual hay inconveniente.

Claro es que si una separación s_k, (fig. 53), llega á igua-

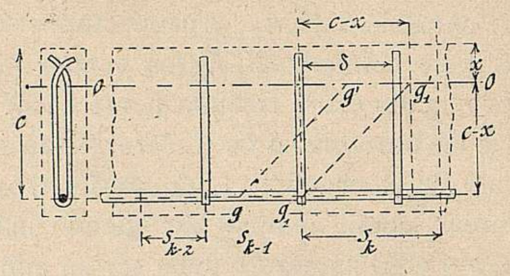


Figura 53.

lar ó superar á $(c-x)$ y hay un solo orden de estribos $(m=1)$, se debe limitar la mayor s_k á la inmediata anterior, s_{k-1}, ó á una distancia, δ, algo menor que $c-x$: de otro modo habría una grieta virtual á 45° sin protección alguna.

Si, como en la mayoría de los casos, α se compone de dos ó tres órdenes de barras, los dos ó tres estribos de cada grupo deben, en lugar de situarse en un mismo plano vertical, distribuirse simétricamente alrededor de los puntos de división s_{k-1} s_k, (fig. 54). Así, además de facilitarse el apisonado,

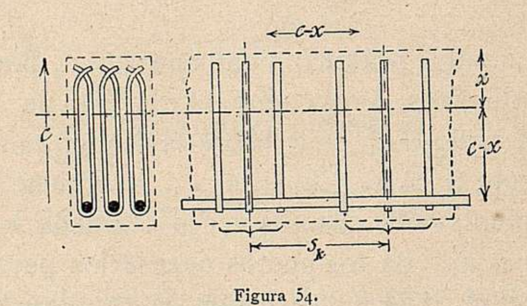


Figura 54.

nado, la acción de los estribos se distribuye á lo largo de la distancia protegida, y no hay inconveniente en que s_k, dis-



tancia entre ejes de dos grupos consecutivos, sea $> c - x$, con tal que ninguna recta á 45° deje de cortar algún estribo.

Creen algunos que los estribos son eficaces por equilibrar el desgarramiento horizontal D_o, que en una longitud s de viga, da un esfuerzo total.

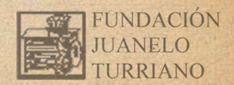
$$D_o \times a\, s = \frac{E}{ab} \times a\, s = E \frac{s}{b} = E\, s \times \frac{3}{3-n} \times \frac{1}{c};$$

que, para la carga de desgarramiento $A_d = \frac{4}{5} \times 1.200$ kilogramos por centímetro cuadrado sobre la sección total, 2ε, del estribo, da:

$$960 \times 2\,\varepsilon = E \frac{s}{c} \times \frac{3}{3-n}; \qquad s = 640\,(3-n)\,\frac{\varepsilon}{E}\,c,$$

que conduce á separaciones más de 1,5 veces las debidas según (178). El cálculo así hecho, es falso. En primer lugar, la carga de desgarramiento D_o la debe soportar bien el hormigón solo. Como vimos, (capítulo 2.°, III), para esta clase de cargas la eficacia de las armaduras sólo se manifiesta experimentalmente cuando está agotada la resistencia H_{rd} del hormigón. Y, por último, la carga transversal, A_d, de los estribos, no puede, ni con mucho, alcanzar el límite, $A_{rd} =$ 960 kilogramos por centímetro cuadrado, supuesto.

En efecto: consideremos un estribo formado por barras de sección $a\, e$ (fig. 55). El equilibrio de una rebanada de altura dy se debe: á los esfuerzos horizontales resistentes, desarrollados en las secciones $a\, e$, $A_d \times a\, e$; á los verticales, producidos por la adherencia, $(H_a \times e\, dy)$, en las caras normales al papel y $\left(\pm H_a \times \frac{a}{2}\, dy\right)$ en las caras paralelas, formando estos últimos, dos pares $\left(H_a \times \frac{a}{2}\, dy \times \frac{a}{2}\right)$.



Tomando momentos respecto á *M:*

$$A_d \times a\,e \times dy = H_\alpha \times e\,dy \times a + 2\,H_\alpha \times \frac{a}{2}\,dy \times \frac{a}{2}\,;$$

$$A_d = H_\alpha \left(1 + \frac{a}{2\,e}\right).$$

La carga por desgarramiento del estribo no puede ex-

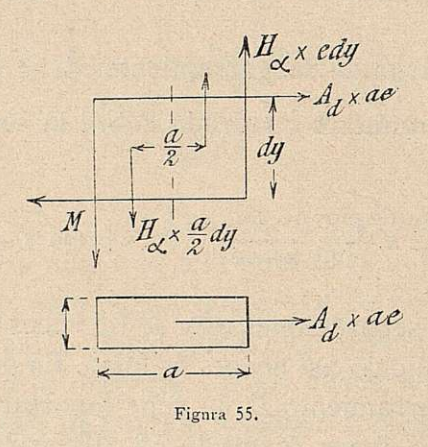


Figura 55.

ceder de la de adherencia efectiva, H_α, por el binomio $\left(1 + \frac{a}{2\,e}\right)$. Si la barra es cuadrada, para que A_d alcance á 960 kilogramos por centímetro cuadrado sería preciso que H_α llegara á $\frac{960}{1,5} = 640$, y si es una pletina, ó fleje, ($a=10\,e$), H_α debería ser $\frac{960}{6} = 160$. Como H_α, no debe exceder de 4,5 kilogramos por centímetro cuadrado, la carga transversal del estribo no debe pasar de la insignificancia de 27. Es, pues, el hormigón el que por sí solo, ó muy poco menos, tiene que resistir el desgarramiento, en sentido horizontal ó en cualquiera otro: las armaduras son prácticamente ineficaces para ese efecto.



Los estribos resisten exclusivamente por tracción, desempeñando un papel análogo al de los montantes en una celosía en *N*, (fig. 56), de diagonales comprimidas, á las que se

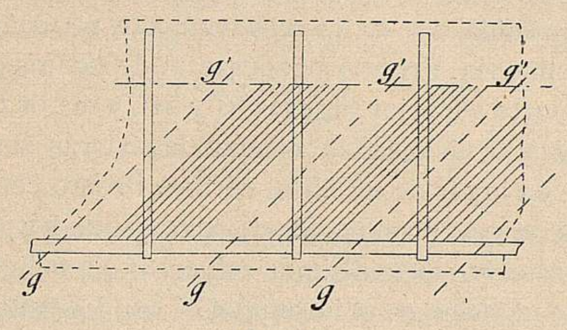


Figura 56.

pueden lógicamente asimilar las zonas de hormigón comprendidas entre las series de grietas virtuales *gg'*. En la dirección de esas diagonales actúan las cargas principales de compresión, de valor unitario D_o, que el conglomerado resiste holgadísimamente y á lo largo de los planos *gg'*, otra carga de desgarramiento, también D_o y también resistida, en condiciones normales por el hormigón. Si se fuerzan las sobrecargas, D_o alcanza el valor H_{ra} y se producen *realmente* las grietas en la dirección de las trayectorias *gg'*; pero en lugar de ensancharse rápidamente y de producirse la tracción oblicua de la figura 50, que las hace correrse en sentido horizontal, los estribos mantienen *cosida* la fisura, que sólo se ensancha poco á poco, á merced del alargamiento que aquéllos van sufriendo bajo su carga de tracción, A'', y que en algunos experimentos llega á determinar su rotura.

Mas para que todo lo anterior suceda, es preciso que los estribos puedan soportar de un modo real tensiones elevadas. La parte inferior, alrededor de las barras α, desde lue-



go está perfectamente *anclada* sobre éstas. La parte superior, dentro de la zona comprimida, es menester que encuentre en el hormigón firme apoyo. Si las ramas del estribo son rectas, sólo las sostiene la adherencia total, que, como la altura comprimida $x = nc$ es relativamente pequeña, no puede dar gran cosa. Precisa oponerse al deslizamiento encorvando la parte superior (figuras 53 y 54), y mejor todavía, si la armadura es disimétrica, ciñendo las barras superiores y haciendo, en lugar de estribos, cercos. Pronto conoceremos una forma para la terminación de barras, que les permite resistir eficazmente elevadísimos esfuerzos sin peligro de deslizamiento ni lesión en el hormigón al que los refieren.

III

Armaduras principales levantadas.

Los esfuerzos principales P (fig. 51), pueden ser contrarrestados de un modo más directo, oponiéndoles elementos metálicos orientados en su misma dirección. Si consideramos una serie de grietas virtuales (fig. 57), GG', $G_1 G_1'$, sepa-

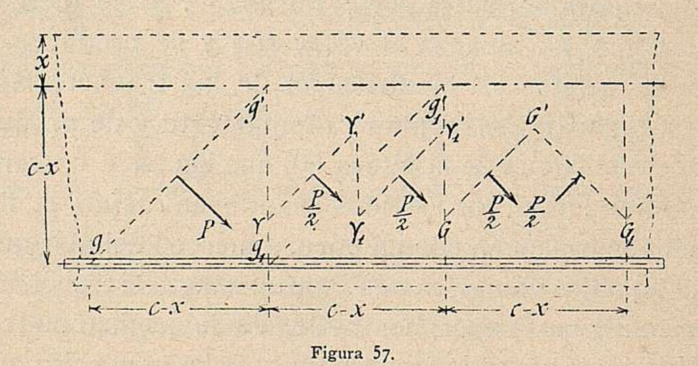
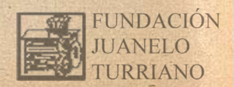


Figura 57.

radas horizontalmente $(c - x)$, el valor de P es la mitad del ya conocido:



$$Pa = \frac{3\,E}{2\cos 45^o} \times \frac{1-n}{3-n} \qquad (183)$$

tomando para E el relativo á los planos verticales medios entre G y G_1. Si se dispone una serie de barras diagonales, de sección δ_1 centímetros cuadrados, distanciadas horizontalmente $(c - x)$, resultará:

$$\delta_1 = \frac{3\,E}{2\cos 45} \times \frac{1-n}{3-n} \times \frac{1}{A''} \qquad (184)$$

Idéntico es suponer las grietas virtuales en otra forma escalonada, cualquiera que sea el número m de dientes; siempre resultará que á cada trozo horizontal $(c - x)$ corresponderá una suma de tensiones $m \times \frac{P}{2\,m} = \frac{P}{2}$ y otra igual de compresiones, una y otra á 45° con la vertical.

El hormigón soporta sobradamente bien las últimas y á las primeras opondremos una barra ó grupo de barras, de sección total δ_1, según (184), dentro de cada longitud $(c - x)$.

Si las barras están espaciadas horizontalmente s, una sección, δ, protege eficazmente:

$$s = (c - x)\,\frac{\delta}{\delta_1} = c\,(1 - n)\,\delta \times \frac{2\,(3 - n)\cos 45^o\,A''}{3\,E\,(1 - n)} =$$

$$= \frac{2\,(3 - n)}{3}\cos 45^o\,\frac{\delta\,A''}{E}\,c \qquad (185)$$

expresión que sólo difiere de la (177), distancia protegida por un estribo de sección total $2\,\varepsilon$, en la sustitución de un factor $\frac{1}{2} = 0{,}500$, por $2\cos 45^o = 1{,}414 = \sqrt{2}$. La barra á 45° es, á igualdad de sección total, $\delta = 2\,\varepsilon$, $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ veces más eficaz que el estribo. Mas como la longitud de este es $\sqrt{2}$ veces menor, la comparación final, á igualdad de peso de



acero, da una ventaja de 2 á favor de la barra á 45°. Sobre lo cual ofrece otra: la de no dar lugar á la carga de desgarramiento D_o que, con el estribo, tiene el hormigón que soportar.

Su carga resulta:

$$A'' = \frac{3}{2} \times \frac{1}{(3 - n) \cos 45^\circ} \times \frac{E}{\delta c} \qquad (186)$$

Para $A'' = 1.200$ kilogramos por centímetro cuadrado:

$$s = 566 (3 - n) \frac{\delta}{E} c \qquad (187)$$

y, á la inversa, la sección necesaria:

$$\delta = \frac{0,00177}{3 - n} \times \frac{E}{c} s \qquad (188)$$

Si se pudieran fijar sólidamente sus extremos, los estribos inclinados á 45° constituirían una excelente solución. Pero bajo tal ángulo, ni la adherencia con el hormigón que envuelve las barras α, ni el rozamiento con éstas, ni aun la unión con las mismas por medio de ataduras de alambre, pueden, ni aun sumadas, proporcionar reacción suficiente para que la tensión A'' llegue al valor necesario. Las barras *Kahn* (fig. 58), son más ingeniosas que prácticas: los trozos

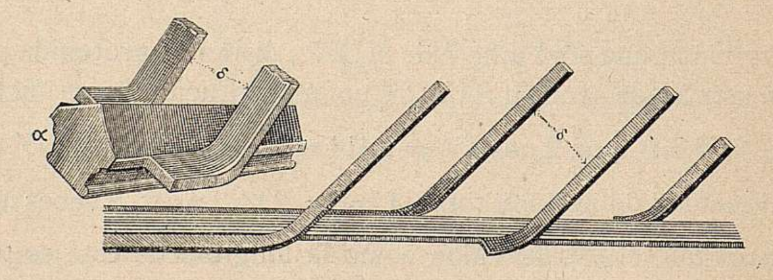


Figura 58.

laterales, δ, pueden ser cortados y separados longitudinalmente del central, α, para constituir, levantándolos y encorvando su parte superior, excelentes enlaces. La dificultad práctica estriba en disponer de secciones apropiadas $(\alpha + 2\delta)$ y de proporcionar las longitudes, s, á las secciones, δ, á la altura de la pieza y á las variaciones del momento M; aparte del vicio original de todos los tipos americanos y del precio relativamente elevado.

La asimilación de la pieza armada con barras á 45°, con una celosía de cruces de San Andrés, (fig. 59), es más exacta

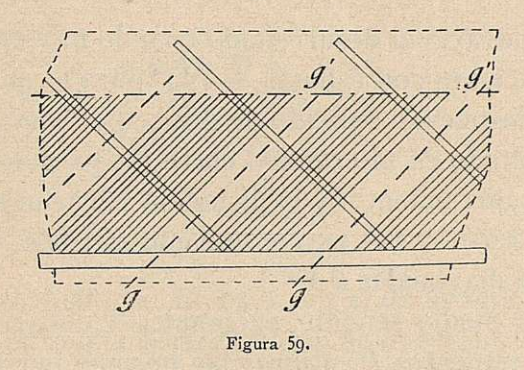


Figura 59.

todavía que en el caso de los estribos á la celosía en N; sólo existen en el alma de la pieza, compresiones y tensiones, todas á 45°.

Si las barras δ se inclinan más de 45° con la vertical, (fig. 51), el esfuerzo principal P, correspondiente á una longitud horizontal $2(c - x)$, se descompondrá en una tensión $\frac{P}{\cos(i - 45^\circ)}$ y un desgarramiento $P \operatorname{tang}(i - 45^\circ)$. Las expresiones (185), (186), (187) y (188) se convierten en:

$$s = \frac{2(3 - n)}{3} \cos 45^\circ \times \cos(i - 45^\circ) \frac{\delta A''}{E} c \qquad (189)$$



$$A'' = \frac{3}{2} \times \frac{1}{(3 - n) \cos 45^\circ \times \cos (i - 45^\circ)} \times \frac{E}{\delta c} \tag{190}$$

$$s = 566 \cos (i - 45^\circ) (3 - n) \times \frac{\delta}{E} c \tag{191}$$

$$\delta = \frac{0{,}001\,77}{(3 - n) \cos (i - 45^\circ)} \times \frac{E}{c} s \tag{192}$$

El desgarramiento unitario es:

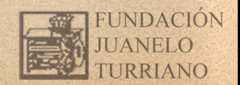
$$D_0 \operatorname{tang} (i - 45^\circ) = \frac{3E}{(3 - n) ac} \operatorname{tang} (i - 45^\circ) \tag{193}$$

de signo contrario al desarrollado cuando hay estribos y de valor decreciente con i, hasta $i = 45^\circ$ para el que se anula, creciendo después, cambiado de dirección, hasta $i = o$.

El resultado es intermedio entre los ya conocidos: hay algo de desgarramiento, y la distancia eficazmente protegida por una sección δ es mayor que con estribos, aunque menor que con diagonales á 45°.

Hay un medio sencillo, económico y eficaz, de contrarrestar los esfuerzos P: utilizar las mismas barras de la armadura α, levantándolas á medida que la minoración de momento flector va haciendo superfluas las partes alícuotas $\frac{\alpha}{m}$, $\frac{2\alpha}{m}$, $\frac{3\alpha}{m}$ ... de la sección formada por m barras de área $\frac{\alpha}{m}$.

Conocida la ley de variación de M, basta representar en la misma escala el momento resistente, que en general será algo mayor, y dividirlo en m partes: las intersecciones de las m paralelas al eje de la pieza con la línea representativa de la ley, darán las abscisas de los puntos en que pueden empezar á levantarse las barras $\frac{\alpha}{m}$.



En muchos casos la ley de M está representada por una parábola de segundo grado, determinada, (fig. 60), por el pun-

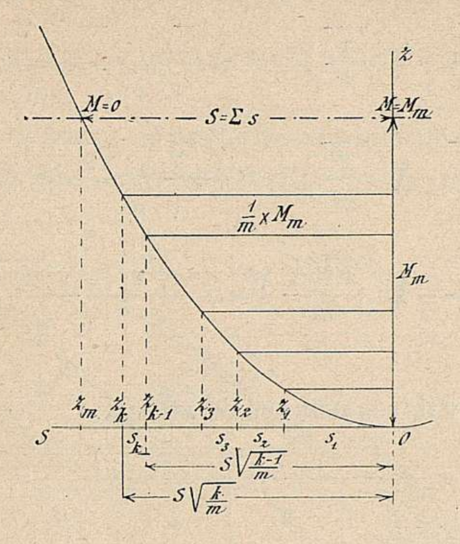
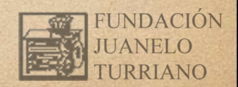


Figura 60.

to en que corta al eje, $M = o$ y por el de momento máximo, M_m, á una distancia horizontal, S, de aquél. La ecuación de la curva, referida á los ejes Os, Oz es $s^2 = S^2 \frac{z}{M}$; á los momentos sucesivos $\frac{m-1}{m} M$, $\frac{m-2}{m} M$... $\frac{m-k}{m} M$, corresponden las ordenadas $z = \frac{1}{m} M$, $\frac{2}{m} M$ ... $\frac{k}{m} M$ y las abscisas $S\sqrt{\frac{1}{m}}$, $S\sqrt{\frac{2}{m}}$ ... $S\sqrt{\frac{k}{m}}$

Las separaciones sucesivas entre los puntos de levantamiento serán:



$$\left.\begin{aligned} s_1 &= S\sqrt{\frac{1}{m}} \\ s_2 &= S\left(\sqrt{\frac{2}{m}}-\sqrt{\frac{1}{m}}\right) = S\,\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{m}} = S\,\frac{0{,}414}{\sqrt{m}} \\ s_3 &= S\left(\sqrt{\frac{3}{m}}-\sqrt{\frac{2}{m}}\right) = S\,\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{m}} = S\,\frac{0{,}318}{\sqrt{m}} \\ s_k &= S\left(\sqrt{\frac{k}{m}}-\sqrt{\frac{k-1}{m}}\right) = S\,\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{m}} \end{aligned}\right\} \quad (194)$$

que, para los valores usuales de m, son:

$m =$	2	3	4	6	8	
$\frac{s_1}{S}$	0,707	0,578	0,500	0,408	0,353	
$\frac{s_2}{S}$	0,293	0,239	0,207	0,169	0,146	
$\frac{s_3}{S}$		0,183	0,159	0,130	0,112	
$\frac{s_4}{S}$			0,134	0,109	0,095	(195)
$\frac{s_5}{S}$				0,096	0,083	
$\frac{s_6}{S}$				0,088	0,075	
$\frac{s_7}{S}$					0,070	
$\frac{s_8}{S}$					0,066	

A medida que decrece M aumenta E: disponemos de la misma sección $\frac{\alpha}{m}$, pero á intervalos cada vez menores, como se necesita para proteger eficazmente secciones cada vez más cargadas.

La primera barra se puede levantar desde el plano 11′, final de s_1, (fig. 61). Conviene dirigirla á la intersección del

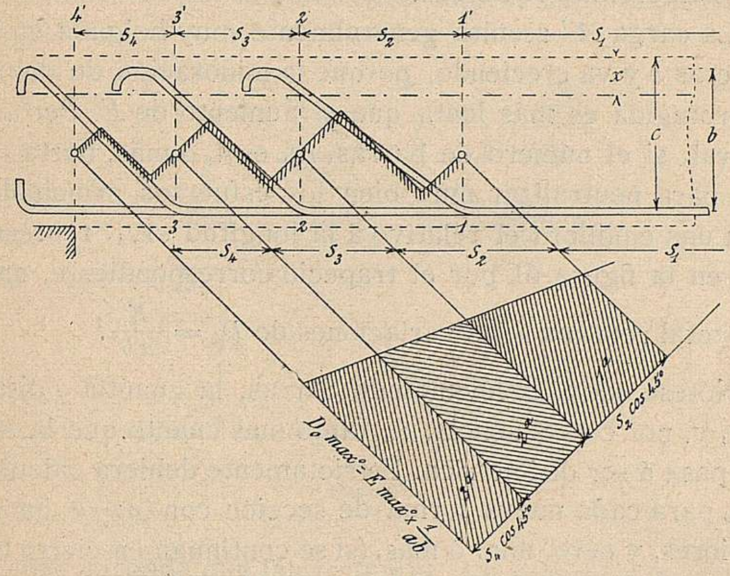


Figura 61.

plano 22′, final de s_2, con la fibra neutra; con la restricción, sin embargo, de que el ángulo i no pase de 45°; análogamente haremos con las demás.

Cada barra protege una longitud horizontal de viga, que es la separación de número subsiguiente, $k+1$ para la k—ésima barra y contada á partir del punto k. El esfuerzo cortante al que corresponde la carga principal, es el medio de los relativos á los puntos k y $k+1$.

Conocidas la sección, $\delta = \frac{\alpha}{m}$ y la inclinación i, bastará comprobar si la carga:

$$A'' = \frac{3}{2\,(3-n)} \times \frac{1}{\cos 45^\circ \times \cos(i-45^\circ)} \times \frac{s_k}{c} \times \frac{m}{\alpha} \times \frac{E_k + E_{k+1}}{2} \qquad (196)$$

es admisible, que, en general lo es, tanto más cuanto mayor es el número, m, de barras.

La carga A'' resulta generalmente muy holgada en las primeras s y va creciendo, porque la minoración de distancia protegida es más lenta que el aumento de E. Pero, en general, si el número de barras, m, es 4, ó más, basta con ellas para neutralizar muy bien los esfuerzos principales. Cada una equilibra el relativo á la longitud s_{k+1}, representado en la figura 61 por el trapecio correspondiente, en el área total relativa á las variaciones de $D_o = \frac{E}{a\,b}$.

Nótese que al ir levantando barras, la cuantía q disminuye, y, por consecuencia, n, tanto más cuanto que la sección pasa á ser disimétrica. Estrictamente debiera calcularse D_o para cada nueva forma de sección con $(m-k)$ barras inferiores, y cero, una, ó más, (si se continúan en cierto trecho), superiores. Las variaciones de M_{e_0} é I se compensan sensiblemente por la disminución de n, y no vale la pena de complicar el problema, tanto más cuanto que la carga de las barras es generalmente moderada y que protegen con holgura la zona asignada á cada una.

El levantamiento de las barras puede hacerse brusco, ó gradual, (fig. 62). En el primer caso, la tensión $\frac{P}{2\cos(i-45^\circ)}$ produce, en cada codo, otra tensión, T_c, igual, en la prolongación horizontal de la barra y una compresión del conglomera-



do, C_c, según la bisectriz del codo, $\frac{P}{2\cos(i-45°)} \times \frac{\cos i}{\operatorname{sen}\left(45+\frac{i}{2}\right)}$.

La primera se suma con la tensión propia de la barra, que en el punto k, en que el momento es $\left(\frac{k}{m} \times M_m\right)$, vale $\frac{1}{m} \times \frac{1}{b} \times \left(\frac{k}{m} M_m\right)$. Dicho aumento de tensión sólo puede ser equilibrado por la adherencia lateral sobre la misma ba-

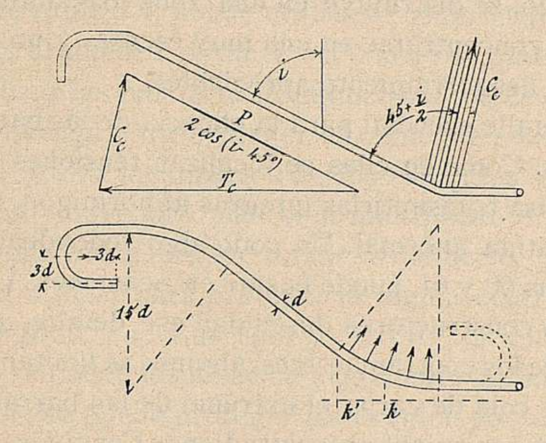
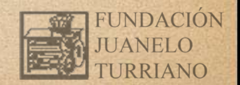


Figura 62.

rra, más cargada que las restantes. La compresión, C_c, se localiza en una zona pequeña del conglomerado, dando una carga unitaria que puede ser peligrosa, porque además tiende á producirse el desgarramiento por ambos lados de esa zona, mucho más cargada que las adyacentes.

La experimentación confirma plenamente lo dicho, y cuando las barras se acodan en ángulo brusco, se producen las grietas inclinadas, arrancando siempre de los vértices y acusando el excesivo trabajo acumulado en zona tan estrecha.

Si la barra se levanta suavemente, encorvándola de un



modo gradual, tanto en la parte baja como en la alta, (figura 62), en primer lugar se consigue una inclinación, en la parte media de la barra, más próxima á 45° y más favorable para resistir los esfuerzos principales. La tensión en las prolongaciones horizontales de la barra se reduce considerablemente por efecto de la disminución exponencial, característica del arrollamiento sobre elementos curvos. La compresión desarrollada sobre el conglomerado se reduce en total y, sobre todo, se distribuye en una zona bastante extensa, en lugar de concentrarse en una muy escasa, y no da lugar á cargas de desgarramiento apreciables.

Otro detalle esencial para la eficacia de las barras es su terminación. Como en ellas se localizan tensiones muy elevadas, precisa transmitirlas íntegras al hormigón, sin imponer á éste fatiga anormal. Un codo algo redondeado, como en las figuras 60 y 61, puede bastar en ocasiones. La mayor parte de los constructores descuidan ese detalle, que dejan al cuidado de los contramaestres; algunos se limitan á hender en forma de cola de carpa el extremo de las barras.

El gancho terminal preconizado por *Considère*, (fig. 62), con un radio 3 d (ó mayor si se puede), es la única forma racional y práctica. Experimentalmente resulta posible alcanzar en la barra la misma carga límite elástica sin que el hormigón padezca, ni se inicie deslizamiento alguno. La adherencia aparente ó virtual de barras así terminadas se eleva á unas cuatro veces la efectiva. Con barras tales se pueden exceder los diámetros límites dados por el cuadro (172) si así conviene. Pero, en general, precisa, como hemos visto, que el número de barras, m, sea suficiente para disponer de $m - k$, directamente empleadas en contrarrestar los esfuerzos principales; k, ó una, por lo menos, conviene conservarlas horizontales, de apoyo á apoyo.

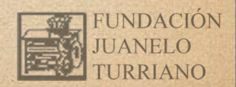


Empleando la forma encorvada, (fig. 62), única verdaderamente recomendable, los puntos de división, 1, 2, ... *k*, deben corresponder, no con el origen de la curva, sino con el medio, *k*, ó con el fin, *k'*; el momento resistente disminuye hasta allí muy poco, pues se conservan horizontales las barras restantes, y es una sola, la encorvada, la que pierde un poco de su brazo de palanca.

La misma forma encorvada, con dos terminaciones en gancho de radio $3d$, puede utilizarse como elemento secundario si la armadura es simétrica ó si no se quiere ó no conviene utilizar las barras α. El diámetro d puede ser entonces el que convenga para proteger eficazmente cualquier longitud. Pero por la localización de los esfuerzos en las zonas terminales, convendrá más bien multiplicar el número de esas diagonales sueltas que forzar su diámetro. En tal forma se pueden utilizar para proteger la región central de la pieza, de longitud $2s_1$, á un lado y otro de los máximos M_m, donde no se puede disponer de ninguna de las barras α.

O bien, se puede proteger esta región por medio de estribos, cuya sección y separaciones se determinarán por las expresiones (178) y (179), partiendo del esfuerzo cortante relativo al punto 1.

Los estribos son siempre útiles como elementos de trabazón, particularmente en las T, como inmediatamente veremos. De aquí que la solución práctica más recomendable sea la representada en la figura 63. En las longitudes s_1, á partir del plano de máximo momento, emplear estribos, que equilibren los esfuerzos principales relativos al área (E_1 E mínimo): su separación s_ε será variable. Proseguir con estribos, de la misma sección y separación constante é igual á la mínima s_ε en aquella zona, hasta los apoyos; quedará, así, equilibrado el efecto del rectángulo de esfuerzos principales



de altura D_1. Por último, el triángulo restante desde D_1 hasta D máximo, neutralizarlo con las barras α levantadas, que, de este modo, no precisa sean muchas.

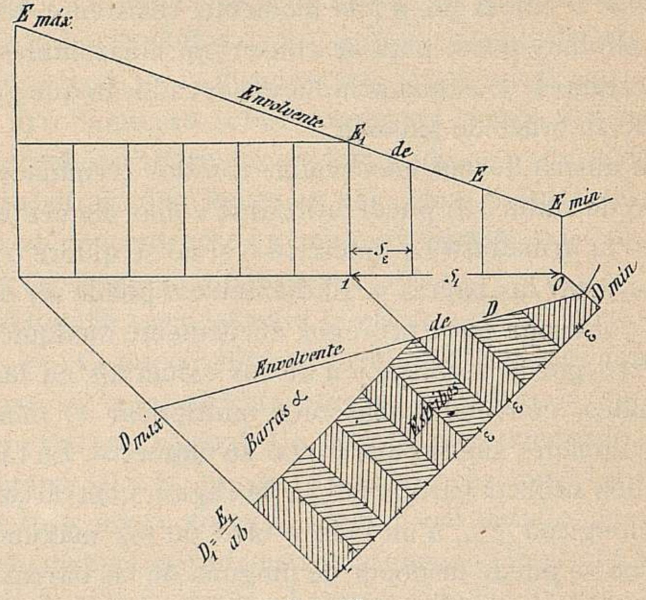


Figura 63.

En las secciones en T, la anchura del alma, a_1, debe ser la suficiente para que la carga, $D_o = \frac{E}{a_1 b} = \frac{3E}{(3-n)\,a_1 c}$, no exceda del límite admisible, $H_{ra} = 0{,}10\,H_{rc} = 4{,}5$ kilogramos por centímetro cuadrado, para hormigón de 300 kilogramos; es decir:

$$a_1 \geq \frac{3E}{4{,}5\,(3-n)\,c} = \frac{2}{3}\,\frac{E}{(3-n)} \qquad (197)$$

que es idéntica á la (170) ya conocida. Para el máximo usual en estas piezas, ($q = 0{,}003$, $n = 0{,}259$):

$$a_1 = 0{,}24\,\frac{E}{c} \text{ ó } \frac{E}{4\,c} \qquad (198)$$



En el cambio de anchura de a_1 á a, en la unión del nervio con el intradós, (fig. 64), el desgarramiento tiende á manifestarse según las prolongaciones de los paramentos, al

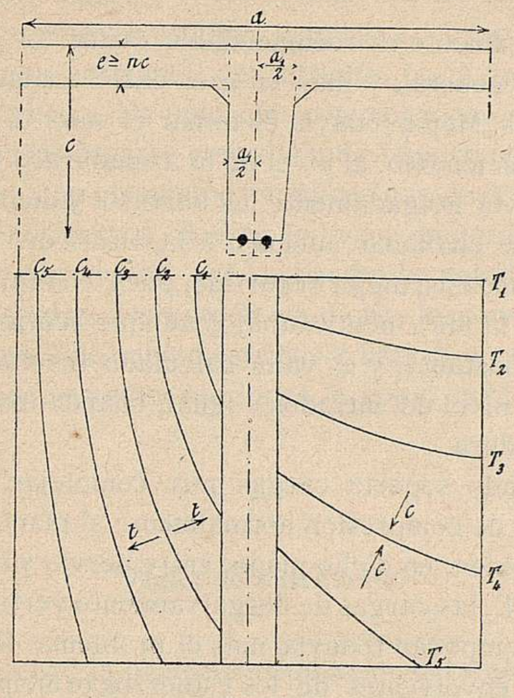


Figura 64.

pasar bruscamente el esfuerzo por unidad de longitud, de $D_o\, a_1$ á $D_o\, a$. Esto determina un mínimo de espesor del forjado, puesto que la carga media en esas dos secciones:

$$D_e = \frac{D_o\, a_1 \times (a - a_1)}{2 \times a\, e} \leq 4{,}5 \text{ kg/cm}^2;$$

ó, exagerando al tomar en lugar de $(a - a_1)$, a:

$$\frac{D_o}{2\, e} \leq 4{,}5; \text{ ó } e \geq \frac{D_o}{9} = \frac{3\, E}{9\,(3 - n)\, c} = \frac{a_1}{2}; \qquad (199)$$



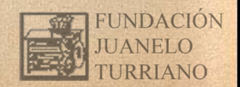
y para el máximo de n, 0,25:

$$e = 0{,}12 \frac{E}{c} \text{ ó } \frac{E}{8c} \tag{200}$$

Prácticamente es recomendable evitar los ángulos entrantes, en general, y más en este caso; conviene siempre chaflanarlos. Mejor todavía es tomar el valor a_1 como ancho medio, reduciéndolo, al nivel de la armadura, á lo necesario para envolver holgadamente las barras α y ampliándolo, sin perjuicio de chaflanar además, á la altura del intradós. El material queda así mejor repartido, pues, en realidad, D_o disminuye de la fibra neutra abajo, aunque teóricamente permanezca constante; y el valor calculado resulta superior al efectivo al nivel del intradós é igual, cuando más, á lo largo de la armadura.

El forjado soporta cargas muy complejas, resultantes del trabajo de compresión normalmente al plano de la figura y del de flexión, en dicho plano, entre nervio y nervio. En la cruz de la T, las cargas de desgarramiento verticales y horizontales, complican todavía más el problema. Resultan trayectorias, envolventes de los esfuerzos principales, C_n, de compresión, (líneas de rotura por tracción), y T_n, de tracción (líneas de rotura por compresión), representadas en la misma figura 64. Las armaduras que la flexión del forjado impone, dirigidas normalmente al nervio, y que forman ángulos próximos á 90 con las líneas C_n, actúan como armaduras secundarias, que equilibran los esfuerzos principales de tracción, normales á las C_n.

Los valores de dichos esfuerzos resultan prácticamente holgados gracias á la relativa pequeñez de las cargas de compresión paralelas al nervio. La pequeñez de q, (referida siempre al rectángulo virtual ac), lleva consigo la de n y la



de H'; recordemos que en estas piezas la limitación de momento resistente corresponde á la carga A de la armadura, y que lleva consigo cargas H' de 14,6 kilogramos por centímetro cuadrado para $q = 0{,}001$, (cap. 4.°, III, cuadros (80)).

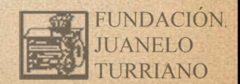
Análogamente se originan esfuerzos principales normalmente al plano horizontal del intradós, en la unión del nervio con la cabeza. De aquí que convenga *coser* esta zona, que puede considerarse como la más importante, la clave, del conjunto, con elementos metálicos que directamente absorban tales esfuerzos. Y esto lo hacen mejor los estribos, verticales y numerosos, que las barras levantadas, oblicuas y más espaciadas. De aquí lo ya dicho, la conveniencia de emplear simultáneamente estribos y barras levantadas, distribuyendo entre ambos las zonas D_o como en la figura 63.

IV

Vigas de entramado.

Hemos visto la perfecta asimilación del trabajo del alma al de una celosía, simple ó múltiple, en N, en X, en Δ, según el número de grietas virtuales que se consideren en una longitud dada. Tomemos ésta igual al brazo de palanca $b = c - \frac{x}{3} = \frac{3-n}{3} c$, (fig. 65). La superficie en que actúa la carga principal de tensión, D_o, es $a_1 \times \frac{c - x + \frac{x}{3}}{\cos 45^\circ}$ $= a_1 c \frac{3-2n}{3 \cos 45^\circ}$ y el esfuerzo total de tensión en la diagonal:

$$\Delta = \frac{E}{a_1 c} \times \frac{3}{3-n} \times a_1 c \frac{3-2n}{3 \cos 45^\circ} = \frac{(3-2n) E}{(3-n) \cos 45^\circ} \quad (201)$$



y la compresión del montante:

$$C_m = \Delta \cos 45^o = \frac{3-2\,n}{3-n}\,E\,. \qquad (202)$$

Hay una componente horizontal, de ese mismo valor, que se transmite á ambas cabezas: en la superior se equilibra

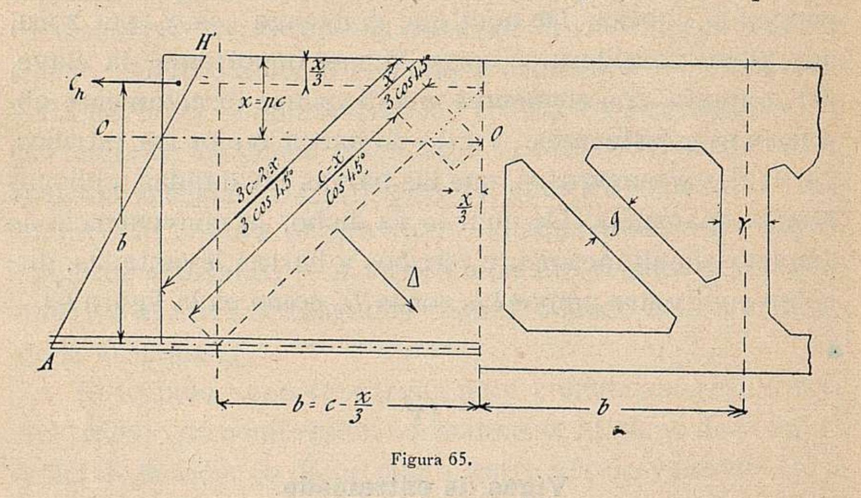


Figura 65.

con el esfuerzo total de desgarramiento, á lo largo de la fibra neutra, desarrollado en la longitud b, cuyo valor es E, y del que queda una parte, $\frac{n}{3-n}\,E$, sin neutralizar, actuando sobre el arranque de la celosía. En la cabeza inferior, ese mismo desgarramiento, $\frac{n}{3-n}E$, se suma con la tensión, $\frac{3-2\,n}{3-n}\,E$ y el esfuerzo total, E, es absorbido por la adherencia, como siempre, en la longitud b entre nudos.

La existencia de esa fuerza horizontal, $\frac{n}{3-n}\,E$, es lo único que diferencia el sistema considerado, de una celosía análoga tal como ordinariamente se concibe, suponiendo la compresión de la cabeza superior *uniformemente repartida*



en toda ella. Los valores de Δ y C_m son $\frac{E}{\cos 45^o}$ y E. Los que acabamos de determinar son esos mismos, afectados por $\frac{3-2\,n}{3-n}$, es decir, algo menores, lo que proviene de que no consideramos, (porque no lo están), uniformemente repartidas las cargas en la zona comprimida, sino según la ley triangular. El decrecimiento desde la carga H', máxima, hasta la nula en la fibra neutra, desarrolla inevitablemente esa fuerza horizontal, $\frac{n}{3-n}\,E$, en la longitud b y que actúa, se transmite y se equilibra, como hemos visto.

Según la orientación de $g\,g_1$, estarán la diagonal estirada y el montante comprimido, ó viceversa. Lo más práctico es lo primero, por la mayor longitud de la diagonal, cuyo peso propio tiene que producir forzosamente algún pandeo, que nada importa si la carga es de tensión. De otro modo habría que calcularla sujeta á flexión compuesta.

La sección metálica necesaria es:

$$\delta = \frac{3-2\,n}{3-n} \times \frac{E}{1.200 \cos 45^o} = 0,001\,18\, \frac{3-2\,n}{3-n}\, E \qquad (203)$$

La de hormigón, de cuya H_t se prescinde, es lógico determinarla de modo que resista bien al desgarramiento, del que no habrá que ocuparse ya al calcular el montante. Resulta, para un grueso g y ancho a_1:

$$\frac{n}{3-n}\, E \times \frac{\cos 45^o}{a_1\, g} \leq 4,5 \text{ kg/cm} \;;\; g = 0,157\, \frac{n}{3-n}\, \frac{E}{a_1} \qquad (204)$$

La cuantía que corresponde es:

$$q\,a = \frac{\delta}{a_1\, g} = \frac{0,001\,18}{0,157}\, \frac{3-2n}{n} = 0,007\,5\, \frac{3-2n}{n}$$



y generalmente excesiva. Es preferible determinar la sección $a_1 g$ por lo dicho respecto á la tracción simple, de modo que $q \leq 0{,}040$, lo que da

$$g \geq 0{,}295 \frac{3-2n}{3-n} \frac{E}{a_1} \tag{205}$$

y el desgarramiento sólo produce una carga de 2,3 kilogramo por centímetro cuadrado.

El montante, relativamente corto y bien empotrado en las cabezas, sólo requiere una armadura que relacione las otras y que, sobre todo, facilite su montaje. Su grueso, prescindiendo de ella, es:

$$\gamma = \frac{3-2n}{3-n} \frac{E}{45\, a_1} = 0{,}222 \frac{3-2n}{3-n} \frac{E}{a_1} \tag{206}$$

El factor $\frac{3-2n}{3-n}$ varía de 0,97 para $n = 0{,}10$ á 0,91 para $n = 0{,}25$. Puede prescindirse de él, lo que equivale á suponer la celosía ordinaria de los sistemas articulados.

En vigas de poca altura no conviene esta celosía en *N*, que complica la mano de obra, sin gran economía de material ni de peso muerto. Es preferible hacerla en Δ (fig. 66).

Tomemos como distancia entre nudos $2\,b$. La resultante de las cargas principales de tensión tendrá el mismo valor Δ ya calculado; subsisten, pues, las ecuaciones (201), (203) y (205) que determinan la diagonal tendida. La resultante de las cargas principales de compresión tiene también el valor Δ (201). Bastará, por tanto, calcular una pieza comprimida, de longitud teórica $\frac{c-x}{\cos 45^\circ} = 1{,}414\,(1-n)\,c$, prácticamente menor, por el grueso de la cabeza inferior. Para no tener que acudir á la flexión compuesta, supondremos so-



bradamente tenido en cuenta el efecto del peso muerto, haciendo $k = 1$. El grueso g será seguramente $< a_1$ para los menores valores de E y $> a_1$ para los mayores. Calcularemos la presión total admisible en la pieza cuadrada (a_1^2), y

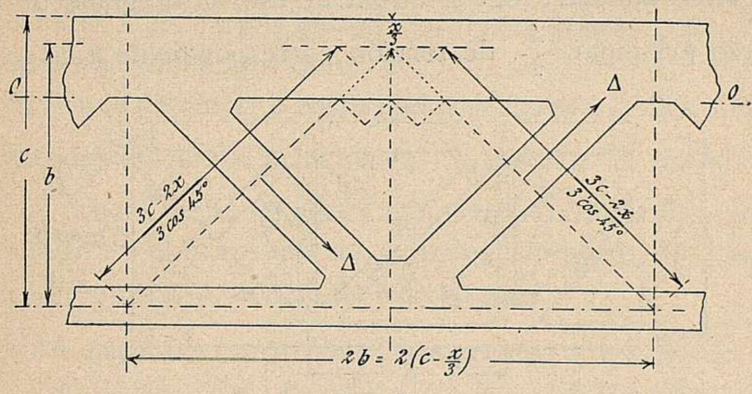
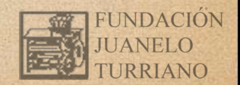


Figura 66.

esa sección daremos á la diagonal cuya presión total Δ se aproxime más á aquélla. Las diagonales más cargadas necesitarán $g > a_1$, y les será aplicable la misma carga práctica H_p; las menos oprimidas podrán ser determinadas análogamente suponiendo $g = \frac{a_1}{2}$ ó $\frac{a_1}{3}$, buscando la presión total admisible sobre $\frac{a_1^2}{4}$ ó $\frac{a_1^2}{9}$, y comparándola con $\frac{\Delta}{2}$ ó $\frac{\Delta}{3}$, para hacer $g = \frac{a_1}{2}$, $\frac{a_1}{3}$, etc.

Pero en general, aplicado este tipo á medianas ó pequeñas alturas, no ha lugar á esos tanteos, porque las dimensiones prácticamente convenientes exceden á las estrictas.

Es de notar la aparente contradicción en que se incurre al evaluar la resultante de las cargas principales Δ, que con un mismo valor corresponde en la celosía en N á una longitud entre nudos, b, y en la celosía en Δ á una longitud doble.



Parece á primera vista que la tensión de la diagonal debiera ser en la primera una mitad de la correspondiente en la segunda.

Directamente, (fig. 67), contrarresta la diagonal un esfuerzo principal, $\frac{\Delta}{2}$, de tensión correspondiente á las cargas principales en la grieta virtual *gg'*: el de compresión, de igual valor, desarrolla en el montante la presión Δ cos 45°,

Figura 67.

á expensas de dar origen á otra tensión $\frac{\Delta}{2}$ que se suma á aquélla. La tensión efectiva es, por tanto, Δ. En la celosía triangular cada diagonal equilibra directamente los esfuerzos debidos á las cargas principales en las grietas $g_1\ g'_1$ dobles que gg'; valen, por tanto, Δ.

Si con la distancia b entre nudos se contrarrestan directamente los esfuerzos principales, $\frac{\Delta}{2}$, resulta la celosía en *X*, ó de cruces de San Andrés, mejor que las otras dos cuando la altura ó el brazo útil son grandes. Un puente de longitud $2\ m\ b$, necesita, aparte de las cabezas:

2 m diagonales	(Δ) +	(2 m + 1)	montantes	$(\Delta \cos 45^\circ)$
2 m	» (Δ) +	2	»	$(\Delta \cos 45^\circ)$
4 m	» $\left(\frac{\Delta}{2}\right)$ +	2	»	$\left(\frac{\Delta}{2} \cos 45^\circ\right)$

El mínimo de material y mano de obra corresponde á la celosía triangular; pero los vanos, $2\ b$, en las cabezas no pueden ser grandes, sopena de exigir refuerzo para resistir las flexiones locales.

La mano de obra en la celosía de *N* es más sencilla que en la de *X*, por no haber más que $4\ m$ enlaces de tres piezas y 2 de dos, en lugar de $6\ m - 2$ ensambles de cuatro y 4 de tres: para medianas alturas, b, se compensa con creces el exceso de material del tipo *N*, mientras que para grandes b sucede á la inversa, por la menor longitud libre de las piezas comprimidas y por reducirse los efectos locales en los vanos de las cabezas, bastante aminorados por el acometimiento de las diagonales.

El cálculo de estos sistemas, basado en la intervención directa de los esfuerzos principales, es completamente racional y satisfactorio, más, quizá, que el de las piezas maci-



zas: se aprovecha el material, tanto hormigón como acero, en grado máximo y permite construir piezas rectas de grandes longitudes, como el puente del Vélez, proyectado por el autor, para ferrocarril, con vanos de 26,40 m. de luz, hoy por hoy, los mayores del mundo en tramos rectos.

Hemos supuesto que se conserva toda la zona comprimida, empezando el calado del alma en la fibra neutra. Conviene, á veces, reducir dicha zona á la faja superior, la que sufre cargas más elevadas, y aligerar la viga desde más arriba de la fibra neutra, suprimiendo el hormigón poco cargado. Entonces es más sencillo y suficientemente exacto calcular el sistema como una celosía ordinaria, cuyos ejes de compresión y tensión pasan por los centros de gravedad de la cabeza superior y de la armadura. Se supone que las presiones máxima y mínima se igualan con la media, cometiendo un error, tanto menor, cuanto más pequeña sea la altura de la cabeza y más diste de la fibra neutra, es decir, más fuerte sea la cuantía aparente $\frac{a}{ac}$.

Hay otras formas de entramado, como las vigas de arcadas *Vierendeel* y similares, en que sólo existen los montantes: son sistemas estáticamente indeterminados, cuyo cálculo sólo es factible acudiendo al estudio de las deformaciones por los métodos generales de Mecánica.

V

Torsión.

No es frecuente esta forma de trabajo, pero se presenta algunas veces, cuando sobrecargas aisladas de importancia actúan, disimétricamente distribuídas, en una ó varias sec-



ciones transversales de una pieza. Las resultantes, F, obran con brazos de palanca, f, respecto al plano de simetría de la sección; la flexión longitudinal se opera bajo la acción de las fuerzas F trasladadas á dicho plano, traslado que origina otros tantos momentos de torsión, $F f$ (centímetros-kilogramos), ó como siempre hacemos, M_f (m-kg) $= \frac{F f}{100}$.

Hay que estudiar entonces el efecto de M_f sobre la pieza y sobre los apoyos. En éstos deben desarrollarse pares de empotramiento transversal que equilibren á ΣM_f y que producirán flexión sencilla en su plano medio, perpendicular al de simetría de la pieza.

En ésta sólo cabe acudir al principio de los sólidos heterogéneos; calcular el momento de inercia polar de la sección, I_p, y evaluar las cargas transversales máximas por las expresiones generales (24) y (25), como si se tratara de un momento de flexión. Como todas las fibras están en análogas condiciones, salvo la variación de brazos de palanca, η, respecto al centro de gravedad, el momento de inercia, $I_p = I_x + I_y$, se refiere á toda la sección, y es fácil de calcular, gráfica ó numéricamente.

VI

Ejemplos.

1.° Sea una pieza apoyada, en vano de 8 metros, con peso muerto de 500 kilogramos por metro lineal y sobrecarga de 2.000, en total $p = 2.500$. Ya nos ha servido de ejemplo (cap. 4.°, VIII) y hemos obtenido una solución: á $M_m = 20.000$ metros kilogramos, el tanteo, con $q = 0{,}016$, da



$a = 25$, $c = 80$ centímetros, $\alpha = 32$ centímetros cuadrados, $\alpha' = 20$.

Veamos si la solución es admisible. Desde luego no, puesto que $\frac{E}{a\,c} = \frac{10.000}{25 \times 80} = 5$ kilogramos por centímetro cuadrado; ac deberá ser aumentado, por lo menos en las zonas de mayor E. Admitamos esta solución: n, (tabla (100) al final) es 0,421; $n' = 0{,}337$. Hay que calcular los momentos estático y de inercia para determinar D_o:

$$M_e = \frac{25 \times 34^2}{2} + 15 \times 20 \times 27 = 22.550 \text{ cm}^{(3)}$$

$$I = \frac{25 \times 34^3}{3} + 15 \times 20 \times 27^2 + 15 \times 32 \times 46^2 = 1.561.913 \text{ cm}^{(4)}$$

$$D_o = \frac{10.000 \times 22.500}{25 \times 1.561.913} = 5{,}76 \text{ kg/cm}^2$$

superior al límite práctico, 4,50. Como el exceso no es muy grande, y la zona en que tal carga se desarrolla es corta, contigua á los apoyos, cabe aumentar allí lo necesario el ancho a, de un modo gradual, hasta $25 \times \frac{5{,}76}{4{,}50} = 32$ centímetros. Estrictamente se debe recomenzar el tanteo, forzando a, para aumentar ac.

La carga por deslizamiento de las armaduras, D_α, exige, (169), que la suma de perímetros iguale al ancho a_1, forzado ya á 32 en esa zona. El área $\alpha = 32$ centímetros, que se puede obtener con 4 barras de 3,2 centímetros de diámetro, ofrece entonces un perímetro de 40, holgado. Si no se han de levantar las barras, no hay necesidad de codo ni de gancho terminal, pero sí de continuarlas de apoyo á apoyo. Si hubiéramos de levantar tres de ellas, la restante sufriría:



$$D\alpha = 4{,}5 \times \frac{32}{10} = 14{,}40 \text{ km/cm}^2$$

de tendencia al deslizamiento, lo que exige anclar sus extremos.

Supongamos la sobrecarga progresiva, lo que dará un esfuerzo cortante mínimo, $\frac{1.500 \times 8}{2 \times 4} = 1.500$ kilogramos; el máximo total es 10.000. Si las barras forman 2 grupos y los estribos son de 1,0 centímetros de diámetro, $m\,\varepsilon = 1{,}53$ centímetros cuadrados, la expresión (182) da para la primera separación entre grupos y por exceso:

$$s_1 = 400 \times 2{,}58 \times \frac{80}{10.000} \times 1{,}53 = 12{,}5 \text{ cm.}$$

con lo que la repartición gráfica se puede terminar, suponiendo que la variación de E desde 10.000 hasta 1.500 se hace según una recta, en lugar de una parábola.

Si levantamos tres de las barras primarias, lo podremos hacer, (195), á los 200 centímetros del centro para la primera, 83 centímetros después la segunda y 64 más allá la tercera. La primera protegerá una zona de 83 centímetros á partir de su punto de levante. El promedio de E en esa zona de 83 centímetros es 6.650 kilogramos; i tiene por tangente $\frac{s_1}{c - x} = \frac{83}{46}$ y cos $(i - 45)$ vale 0,96; $\delta = \frac{32}{4} = 8$ centímetros cuadrados;

$$A'' = \frac{3}{2\ \ 2{,}58} \times \frac{1}{0{,}707 \times 0{,}96} \times \frac{83}{80} \times \frac{1}{8} \times 6.650 = 740 \text{ km/cm}^2$$

y así con las demás. La tercera debe cubrir $s_4 = 53$ centímetros con inclinación de 45°.

Los resultados numéricos confirman lo anunciado, res-

pecto á la eficaz protección de las zonas asignadas á cada barra primaria.

Sólo queda para proteger con estribos la zona central, de 200 centímetros, para E variable de 5.750 á 1.500. La primera distancia, entre grupos, será como antes y por exceso:

$$s_1' = 400 \times 2{,}58 \times \frac{80}{5.750} \times 1{,}53 = 22 \text{ cm.}$$

y se terminará gráficamente la distribución.

2.° La segunda solución tanteada respecto al momento resistente es una T de 200×100, con $\alpha = 20$ centímetros cuadrados, reducido el forjado á 16 centímetros de espesor.

Según la expresión general (197), el ancho del alma es, al límite, para $n = 0{,}159$:

$$a_1 = \frac{2 \times 10.000}{3 \times 2{,}84 \times 100} = 22{,}4 \text{ cm.}$$

Haremos $a_1 = 25$ en el intradós y 20 al nivel de las armaduras, considerándolo, sin embargo, con su valor medio, 22,5, en el cálculo. D_0 será también el límite, 4,5, puesto que a_1 es el estrictamente necesario.

4 barras de 2,5 centímetros dan $\alpha = 19{,}64$ centímetros cuadrados; su perímetro será desde luego insuficiente, y todas terminarán en gancho Considère.

Las distancias protegidas serán las mismas del ejemplo anterior. En la zona central, de 200 centímetros á uno y otro lado del eje, con estribos idénticos, en grupos de dos, y para $c = 100$, $3 - n = 2{,}84$, $m\,\varepsilon = 1{,}53$:

$$s'_1 = 400 \times 2{,}84 \times \frac{100}{5.750} \times 1{,}53 = 31 \text{ cm.}$$

distancia mínima, por exceso. Empleando la solución mixta



correremos esas separaciones hasta los apoyos, poniendo otros tantos grupos de dos estribos, conforme á la figura 63.

El triángulo de esfuerzos principales restantes corresponderá á una distancia horizontal de 200 centímetros y á un esfuerzo cortante máximo de 10.000 — 5.750 = 4.250 kilogramos. El E medio en la zona de la primera barra será 6.650 — 5.750 = kilogramos, y la carga resultará insignificante.

Es preferible no levantarla allí, sino en más lejos, afectándole entonces una zona horizontal de 83 + 64 = 147, correspondiente á dos barras, en la que el promedio de E vale 7.250 — 5.750 = 1.500, que dará también una carga muy pequeña. La solución práctica será levantar una sola barra, desde el punto medio de la zona hasta la intersección de la fibra neutra con el plano del apoyo. Le afectará el triángulo entero, con E medio $= \frac{4.250}{2}$. Y para:

$$tg\, i = \frac{200}{c' - x} = \frac{200}{84}, \cos (i - 45^{\circ}) = 0{,}926:$$

$$A'' = \frac{3}{2 \times 2{,}84} \times \frac{1}{0{,}707 \times 0{,}926} \times \frac{200}{100} \times \frac{1}{4{,}91} \times 2.125 = 779 \text{ kg/cm}^2.$$

3.° Puente de 30 metros de luz; peso muerto, 3.900; sobrecarga progresiva, incluso acción vertical del viento, 1.500; total, 5.400 kilogramos por metro lineal de nervio.

El momento máximo es 607.500 metros-kilogramos. Si, por condiciones del problema, a=300 y c=265 centímetros, como q ha de resultar muy pequeña, $\mu_1 = 11$; $\alpha = \frac{607.500}{11 \times 265}$ = 210 centímetros cuadrados; $q = \frac{210}{79.500}$ =0, 002 5; n=0,24; la zona comprimida tiene 64 centímetros de altura.



El máximo de E es 81.000 kilogramos; el mínimo, debido á la sobrecarga progresiva, en el centro, $\frac{1.500 \times 30}{2 \times 4} = 5.625$.

El brazo de palanca es $265 \times \frac{3 - 0,24}{3} = 244$ centímetros, demasiado grande para celosía en Δ. Hagámosla en X, (figura 67), y resultarán 12 paños de 244 centímetros, que dan 29,28 metros entre los vértices extremos, desde los cuales hasta sobrepasar los apoyos, habrá dos montantes-tabiques de 80 centímetros en números redondos, con sección, para $a_1 = 36$, de 2.880 centímetros cuadrados y sobradamente resistentes.

La primera diagonal tendida exigirá una sección, mitad de la correspondiente, (203), á la celosía en N, para un valor de E, en la primera cruz:

$$E_1 = \frac{15 - (0,36 + 0,5 \times 2,44)}{15} \times (81.000 - 5.625) = 71.500.$$

$$\delta_1 = \frac{3 - 0,48}{3 - 0,24} \times 0,00118 \times 71.500 = 77 \text{ cm}^2$$

ó, mejor, prescindiendo del quebrado, que vale 0, 913, 84 centímetros cuadrados.

La diagonal central tendrá una sección $\frac{5.625}{71.500} \times 84 = 7$ centímetros cuadrados.

Suponiendo, como siempre, que los máximos E varían rectilíneamente, las demás secciones, δ, se determinan con más sencillez gráficamente, levantando en cada cruz una ordenada hasta la recta, que en cualquier escala represente la variación de 71.500 á 5.625, ya determinada.

Las secciones envolventes son: 1,620 centímetros cuadrados, con grueso de 45 centímetros y cuantía de 0,050, y 648 con $g = 18$ centímetros y $q = 0,011$.



Análogamente, la compresión de la más cargada será la mitad de Δ según (197).

$$\Delta = \frac{3 - 0,48}{3 - 0,24} \times \frac{1}{0,707} \times 71.500 = 92.300 \text{ kgs.}$$

ó, si se prescindiera del reductor, 101.100 kilogramos.

La longitud libre es $0,707 \times 244 = 173$ centímetros y con $a_1 = 36$, la esbeltez menor que 5. Para carga de 44, necesita, armada á 0, 005:

$$\frac{0,96 \times 101.100}{44} = 2.200 \text{ cm}^2$$

que exigen un grueso excesivo. Forzando á 0, 015 la cuantía primaria y á 0, 003 la secundaria, pueden reducirse la sección y el grueso á:

$$h = \frac{101.100}{44 \times 1,24 \times 1,05} = 1.800 \text{ cm}^2;\ g = 50 \text{ cm.}$$

La diagonal central soporta $101.100 \times \frac{5.625}{71.500} = 7.000$.

Con el grueso 18 centímetros determinado ya para la misma pieza extendida, la carga aparente es 10,8 kilogramos por centímetro cuadrado, muy holgada para una esbeltez de 12 y nada importa la inversión de esfuerzos.

Las secciones, h, intermedias ó los gruesos g, puesto que a_1 es constante, se obtienen rápidamente por la interpolación gráfica ya dicha.



CAPÍTULO VII

DEFORMACIÓN Y SOLIDARIDAD

I

Flechas.

En virtud de la equivalencia mecánica de sólidos heterogéneos y virtuales, basada precisamente en la igualdad de las deformaciones elementales, podrían calcularse exactamente las de conjunto si $\frac{E_a}{E_h} = r$, fuera, bien una constante, bien una función definida de las coordenadas de cada punto.

Lejos de ser así, hemos visto que para obtener una aproximación satisfactoria en el cálculo de cargas moleculares precisa atribuir á r dos valores: uno, 15, para la zona sujeta á compresión; otro, ∞, $(E_h = o)$, para la que soporta tensiones. Ni el uno ni el otro son exactos ni constantes; pero los errores que su adopción implica, escasos en lo referente á las cargas H, considerables respecto á las A, vienen á resumirse, compensándose en parte, en un error final, de sentido siempre favorable.

Aplicados esos mismos números al cálculo de la deformación de una pieza, el error es enorme y al mismo tiempo muy variable. Donde existe una fisura, las condiciones son las supuestas; pero fuera de aquella, el momento de inercia de la zona extendida y despreciada, de una altura siempre mayor que la mitad de la total de la pieza, y que entra en la



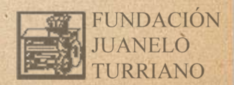
evaluación por su tercera potencia, tiene, por muy escaso que allí sea E_h, un influjo grandísimo. A menos que las fisuras sean tan numerosas que el intervalo entre ellas no baste para restablecer, por adherencia, la íntima soldadura de los dos elementos, la deformación es mucho menor que la calculada.

Suponer el coeficiente de elasticidad constante, lo mismo para la zona comprimida que para la extendida, es también erróneo. En la transición de la fase (II) á la (III), que representa las condiciones habituales de trabajo de las piezas, la mayor parte de la zona tendida conserva un valor de E_h muy pequeño.

Por otra parte, la extensión de dicha zona y la disminución de E_h dentro de ella, dependen, como hemos visto, del valor del momento (cap. 4.°, I). Así, en un trozo de pieza de sección y armadura constantes, pero bajo momento flector variable, la posición real de la fibra neutra, las variaciones de E_h y el momento de inercia efectivo varían de una sección á otra.

Una causa más contribuye á hacer completamente incierto tal cálculo: la solidaridad. A no tratarse de una pieza aislada, la continuidad de la masa hace que participen del trabajo de un elemento de la construcción los adyacentes, los de éstos, etc., etc., y que la fracción realmente soportada por dicho elemento y, por tanto, su deformación, sea, á veces, muy pequeña y, sobre todo, imposible de evaluar *à priori*.

Sin embargo, las deformaciones entran, por lo menos implícitamente, en el cálculo de las construcciones estáticamente indeterminadas. Precisa hacer intervenir en él los momentos de inercia y estático de los diferentes elementos de la obra, ó de un mismo elemento en diversas secciones, si éstas son variables.



No puede hacerse la evaluación de dichos momentos sobre la base $H_{rt} = O$, porque se desconoce la posición de la fibra neutra; puede calcularse ésta, numérica ó gráficamente, como hemos visto, en la flexión compuesta, si F y f son ya conocidos. Pero no lo son: se trata, por lo contrario, de determinarlos, al escribir las ecuaciones generales de la deformación, en las que entran I y M_e.

No hay más remedio que evaluar estas magnitudes sobre la hipótesis de E_h constante, haciendo r igual á 10 para corregir, hasta donde es posible, el error cometido en la zona extendida: ya vimos que $r = 15$ corregía, análogamente, el error en sentido contrario, implicado por $E_{ht} = O$.

Si se quiere obtener mayor aproximación, obtenidos ya F y f en las secciones necesarias y calculada allí la posición de la fibra neutra, pueden determinarse los nuevos valores de I y M_e, en la hipótesis $H_{rt} = O$, é introducirlos nuevamente en las ecuaciones generales, para obtener nuevos F y f, y nueva posición de la fibra neutra, etc.

Se confunden vulgarmente los dos conceptos de resistencia y de rigidez, en esencia distintos. Muchos de los constructores de hormigón armado lo hacen, al envanecerse de la exigüidad de flechas de sus obras, tomando, ó tratando de hacer tomar, esa pequeñez de las deformaciones como índice de una elevadísima resistencia á la rotura, ó de un coeficiente de seguridad muy alto.

No hay tal: sea de hormigón armado ó de otro material cualquiera, una pieza muy rígida puede ser poco resistente, y viceversa; presentar una flecha muy pequeña en las condiciones ordinarias de trabajo, y ofrecer, sin embargo, un coeficiente de seguridad inferior al de otra pieza que, en análogas condiciones, sea mucho más flexible.

Un mismo momento resistente, 1.000 metros kilogramos,



por ejemplo, puede obtenerse, sin variar la cuantía, con tres piezas:

$a = 100$;	$c = 10$;	$\alpha = 10$;	$a c^3 = 100.000$
25	20	5	200.000
6,25	40	2,5	400.000

cuyas cargas H', A, serán las mismas, y que, sin embargo, presentarán flechas en la relación aproximada 1 : 2 : 4. La primera, por ejemplo, resistirá holgadísimamente las cargas transversales; la segunda, de un modo estricto, y la tercera, las sufrirá muy grandes, y estará mucho más cercana á la rotura á pesar de su flecha mitad ó cuarto de la de las otras.

Es absurdo y, á pesar de ello, se acostumbra exigir que la deformabilidad, ó relación de la flecha á la luz salvada, tenga determinado valor; la fracción $f : l$, que en un suelo plano es perfectamente admisible, no lo es en un suelo con nervios y mucho menos en un puente.

Es inútil, sobre ser sumamente incierto, el cálculo de flechas. Si se quiere tener en las pruebas una confirmación, tranquilizadora, de los cálculos, se deben medir, no las flechas de conjunto, resultantes finales de infinidad de causas, unas generales y, las más, particularísimas, sino los alargamientos y las contracciones de las armaduras y del hormigón. De ellos, si se ha cuidado de conservar trozos iguales, ó fabricados al mismo tiempo, se pueden deducir los valores, bastante aproximados, de las cargas que realmente soportan los materiales en los puntos de más interés.

Importa, sin embargo, conocer prácticamente cómo crecen las flechas y cómo acusan las distintas fases del trabajo de flexión. En la figura 68 se consignan los resultados experimentales de tres piezas de iguales condiciones, salvo las cuantías. Son las mismas estudiadas por Mörsch y ya cita-



das, (fig. 33), respecto á las posiciones de la fibra neutra (capítulo 4.º, I).

En todas se observa que la ley de variación viene á estar

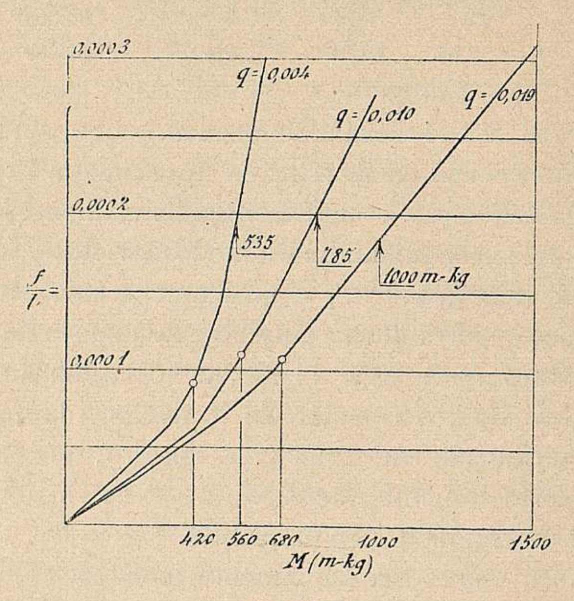


Figura 68.

representada por dos rectas ligadas por una curva. En la fase (I), bajo momentos muy moderados, E_h tiene un valor casi igual por compresión que por tensión. Las flechas son prácticamente proporcionales á los momentos. En la fase (II) la zona tendida desarrolla un E_h rápidamente decreciente: el momento de inercia real va aminorando y la flecha creciendo cada vez más de prisa, según la curva intermedia. En la fase (III) E_h es nulo; la zona tendida no da momento de inercia, que se reduce al de la armadura y de la zona de compresiones y permanece constante; la flecha vuelve á crecer proporcionalmente á los momentos.

Los puntos rodeados por un círculo corresponden á



$H' = 45$ kilogramos por centímetro cuadrado, y los marcados por una flecha, á la aparición de las primeras fisuras, solamente observables en experimentaciones tan precisas, gracias á estar muy lisas las caras de las piezas y á vigilar con cuidado el momento de su presentación.

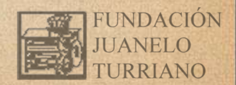
El valor de $f : l$ difiere poco de una pieza á otra, en particular para las cuantías 0, 010 y 0, 019, y en conjunto oscila alrededor de 1 : 10 000, en esas piezas.

Consideremos una, la de 0, 010, por ejemplo, que da $\frac{f}{l} = 0,00011$, bajo un momento de 560 metros-kilogramos, producido en un vano de 200 centímetros por dos fuerzas simétricas, á 50 de cada apoyo. Doblemos el vano y las distancias, reduciendo á la mitad las fuerzas: ni el momento, ni la flecha absoluta variarán, y $\frac{f}{l}$ se reducirá á la mitad. Si, por lo contrario, vano y distancias se reducen, doblando las fuerzas, $\frac{f}{l}$ se duplicará. En general, la deformabilidad, de que da idea $\frac{f}{l}$, no tiene, por tanto, paridad alguna, más que con la relación $\frac{c}{l}$, del canto á la luz.

Hay dos fenómenos que aparentemente contradicen la grandísima rigidez que, en general, presentan las obras de hormigón armado.

El primero es la producción de flechas permanentes, ya explicado con todo detalle (cap. 2.°, III y VII). Las flechas sólo llegan á ser perfectamente elásticas al cabo de un período de reiteración ó de permanencia de las sobrecargas, durante el cual se va modificando la agregación íntima del material, acostumbrándose éste, por decirlo así, al trabajo.

El segundo, más curioso aún, es la considerable deformación permanente que, sin actuar sobrecarga alguna, se



manifiesta en piezas asimétricas de escaso peralte y apoyadas, deformación que á veces es mucho mayor que la correspondiente á sobrecargas más fuertes que la de cálculo.

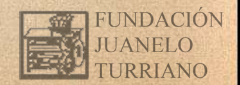
Se explica sencillamente por la retracción, que se opera con libertad en las fibras superiores, sin armadura alguna, mientras que ésta la impide casi por completo en las fibras á ella contiguas. La diferencia de longitud entre unas y otras produce forzosamente una curvatura, tanto mayor cuanto mayor sea la relación de aquella diferencia al canto. El efecto de la retracción es geométricamente idéntico al de una fuerte presión que actuara en el extremo del núcleo central, ó cerca de él, y que produjera la misma diferencia de longitudes.

Si la pieza se mantiene apeada, sin dejarla que se encorve, la influencia de la armadura se extiende á la parte superior cuya retracción se dificulta ó anula, aminorándose mucho esa flecha *inicial de fraguado*.

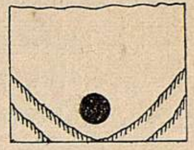
II

Fisuras.

Como se ve por la figura 68 y como resulta de numerosas experimentaciones, el coeficiente de seguridad respecto al comienzo de la fisuración es de 1,2 á 1,4. Prácticamente, en las condiciones usuales de las obras, es mayor, porque en las superficies sin alisar y no poniendo un cuidado especialísimo en la observación, sólo empiezan á advertirse las grietas cuando son bastante más anchas que las finísimas y apenas perceptibles observadas en la experimentación del laboratorio.



Mucho depende también la aparición de esas primeras fisuras de la distribución y número de las barras, (fig. 69).


Figura 69.

Empiezan á formarse con las aristas, en los puntos más alejados de la influencia de la armadura, y se van propagando según gg, $g'g'$. Si la misma sección α se reparte en más barras, se retarda el fenómeno, como es lógico.

En la aparición de las grietas influye muchísimo la retracción de fraguado y desecación, que se opera lentamente y dura á veces mucho tiempo. Gracias á esto, se explica que obras ya probadas y, en servicio, sin haber ofrecido durante algunos meses la menor fisura, las vayan presentando á medida que transcurre el tiempo, unas veces solamente en las zonas tendidas, otras en toda la sección, aunque antes y con mayor amplitud en aquellas zonas, sin que la rigidez varíe sensiblemente, y, desde luego, manteniéndose la obra en el estado de elasticidad perfecta obtenido con la reiteración de sobrecargas.

La producción de tales fisuras ó pelos es debida casi exclusivamente al fraguado y desecación, cuyos efectos se siguen desenvolviendo lentamente algunos meses, y que, sobre todo en climas muy secos, bastan, sin que actúe sobrecarga alguna, para determinar la fisuración. Lo que confirma una vez más la explicación dada al tratar de la elasticidad del hormigón armado (cap. 2.°, VIII), sin recaer en las exageraciones extremas de *Rabut* ni de *Considère*. Donde el hormigón sufre tensiones, acaba por fisurarse de trecho en trecho, sin que por ello desmerezca la confianza en la obra, si ésta ha sido racionalmente calculada sobre la base (φ), suponiendo, no de cuando en cuando, sino *en todas partes*



de un modo sistemático, como lo hemos hecho, $H_{rt} = o$.

Sin embargo, es factible evitar la fisuración, por lo menos en la superficie, donde peor efecto hace á la vista, donde induce á los profanos y aun á los Ingenieros poco acostumbrados á este género de obras, á dudar de su estabilidad, aunque ésta sea sobrada.

Por una causa, cualquiera que sea, tiende el hormigón á sufrir un acortamiento, δ, por unidad de longitud. Si ésta es invariable, por la disposición de la obra, se desarrolla una tensión unitaria $E_h \times \delta$, cuyo valor límite es la carga de rotura por tracción H_{rt}; si se llega á este valor, el hormigón se rompe. Si existe una armadura convenientemente distribuída, no se rompe; llegado $E_h\ \delta$ á H_{rt}, ó poco menos, y si la causa de acortamiento subsiste, el hormigón va tomando los alargamientos relativos necesarios para que la longitud permanezca invariable, y los va tomando *plásticamente,* sin desarrollar carga superior á H_{rt}.

La armadura soporta el esfuerzo total $H_{rt} \times h$, ó la carga unitaria:

$$A_1 = H_{rt} \times \frac{h}{a} = H_{rt} \times \frac{1}{q} \qquad (203)$$

Para que la transmisión del esfuerzo sea factible, mediante la adherencia, precisa que el perímetro p, en la longitud total, l, dé una superficie, cuya carga máxima por deslizamiento, en el centro de l, no exceda del límite práctico de H_a:

$$2\ \frac{H_{rt} \times h}{p\ l} \leq H_a; \quad p \geq 2\ \frac{H_{rt}}{H_a} \times \frac{h}{l} \qquad (204)$$

Si la misma causa, ú otra simultánea, provoca en la armadura una contracción, Δ, por unidad, se le impone, al hacer



invariable la longitud de la pieza, una nueva carga, $A_2 = E_a \times \Delta$, y la total será, en el caso más desfavorable,

$$A = A_1 + A_2 = H_{rt} \times \frac{1}{q} + E_a \times \Delta \qquad (205)$$

Si A se limitara al valor práctico, se necesitaría una armadura muy fuerte. Como la de que tratamos no está destinada á contrarrestar el efecto de las sobrecargas ni pesos muertos, sino pura y simplemente el de los esfuerzos interiores relativos á los cambios de volumen, no hay inconveniente para la solidez de la obra en admitir una carga elevada, con tal que sea inferior á la límite elástica. La condición general que determinará la cuantía será:

$$H_{rt} \times \frac{1}{q} + E_a \Delta \leq A_l \qquad (206)$$

Veamos la aplicación práctica: si la causa no influye en la armadura, por ser simplemente contracción por fraguado ó desecación, para H_{rt}, (que conviene ahora exagerar), $= 12$ kilogramos por centímetro cuadrado y $H_a = 4{,}5$, como siempre:

$$p \geq 5{,}33 \frac{h}{l} \qquad (207)$$

y, como $\Delta = O$, para $A_l = 2.500$ kilogramos por centímetro cuadrado:

$$q \geq \frac{12}{2.500} = 0{,}\ 004\ 8 \qquad (208)$$

Si la causa influye á la vez en los dos elementos, una baja de temperatura de n^o, por ejemplo, para $E_a = 2.250.000$ kilogramos por centímetro cuadrado, (exagerando en sentido desfavorable á q) y $\Delta = 0{,}\ 000\ 012 \times n^o$:

16



$$q \geq \frac{12}{2.500 - 2.250.000 \times 0,000\,012\, n^{\circ}} = \frac{12}{2.500 - 27\, n^{\circ}} \qquad (209)$$

ó, para $n = 20^{\circ}$

$$q \geq \frac{12}{1.960} = 0,006\,1 \qquad (210)$$

Rabut ha realizado tales armaduras, también empleadas en el estadio de la Universidad de Siracusa (Estados Unidos), con éxito completo. La principal aplicación no es la de evitar las fisuras en todas las partes de una obra, sino en las principales superficies vistas, ó en aquéllas donde la filtración de aguas quiera evitarse en absoluto. *Rabut* ha empleado principalmente *chapas armadas*, enlucidos de mortero rico de unos 2 centímetros de espesor, armados con una tela de alambre de 0, 25 en malla de 4 centímetros, que da, en cada sentido, una cuantía de $\frac{1,23}{200} = 0,006\,15$. Esas chapas no han presentado la menor fisuración, y resultan, como en el ejemplo del hierro zunchado con acero, perfectamente elásticas, con una carga límite igual á la de los alambres de la tela metálica.

Aplicar tal armadura especial á todas las partes de una obra sería muy costoso, particularmente por la complicación de mano de obra. Pero cabe, como solución intermedia, armar superficialmente ciertas partes con secciones que den la cuantía 0,006, referida solamente á un espesor de algunos centímetros, y, en las partes restantes, reforzar las armaduras principales, subdividiéndolas bastante para que protejan bien la zona adyacente. Las armaduras de compresión, cuyas cargas son muy moderadas, pueden bastar, solas, ó con ligerísimo aumento de área, multiplicando bastante su perímetro.



Hay otra solución extrema para evitar la fisuración por cambios de longitud en una obra cuyos apoyos no los permitan realizarse con libertad: seccionar desde luego la construcción en partes independientes. En los Estados Unidos se practica mucho, dejando juntas: unas, corridas en toda la obra, duplicando los apoyos, vigas, etc., correspondientes á aquel plano; otras, parciales, constituídas por las mismas juntas de hormigonado, en las que se procura que no se suelde lo nuevo con lo antiguo.

Se pierde así, por lo menos en gran parte, la cualidad más preciosa del hormigón armado: la solidaridad. Y no por eso dejan de presentarse algunas fisuras. Sólo es recomendable este sistema en obras de grandes dimensiones, cuya índole no permita llegar, ó acercarse, á la libre alteración de longitud. Aun así, la subdivisión en trozos no debe ser prodigada, como á veces hacen los yanquis estableciendo juntas á 10 metros y aun á menos.

Lo preferible es disponer la obra de modo que las alteraciones de longitud se hagan con la mayor libertad posible, y para ello estudiar atentamente la clase de esfuerzos que en cada elemento corresponde á la deformación, y colocar las armaduras, principales ó auxiliares, de modo que nunca falten dondequiera que puedan desarrollarse tensiones; hacer independientes aquellos elementos cuyas deformaciones sean discordantes, y, en último caso, recurrir á las armaduras especiales indicadas.



III

Repartición de sobrecargas.

En una obra de hormigón armado, la continuidad de la masa entre un elemento, sus contiguos, los de éstos, etc., etc., hace que al actuar sobre aquél una sobrecarga concentrada, la deformación sea mucho menor que la que, de trabajar aislado, experimentaría. Y en cambio se deforman los elementos contiguos, no directamente sobrecargados; se deforman también los contiguos á aquéllos, etc.; en una palabra, la deformación, producida por una causa aislada, puramente local, se extiende á una zona de extensión considerable, acusando la participación de elementos, á veces muy distantes del afectado de un modo directo, en el trabajo resistente. La solidaridad implica la mutua ayuda de las partes de una obra, que cooperan todas, ó muchas de ellas, á contrarrestar los esfuerzos directamente aplicados á una sola.

Algunos de los más interesantes estudios experimentales de la Comisión francesa consistieron en cargar el centro de un nervio de 7 metros de luz con pesos aislados y en medir las deformaciones del mismo y de sus homólogos á derecha é izquierda, todos ellos separados 3 metros entre ejes. Construído el piso para una sobrecarga de 500 kilogramos por metro cuadrado, ó sea de 10.500 kilogramos uniformemente distribuídos en los 21 metros cuadrados que á cada nervio afectan, se estudiaron las deformaciones producidas por pesos aislados, en el centro del nervio, que originaran momentos flectores de una á cuatro veces iguales á los debidos á aquella sobrecarga tipo.

En la figura 70 se ve la variación de deformaciones,



desde 0,710 centímetros en el nervio *O*, hasta 0,010 centímetros en los *III*, á 9 metros á derecha á izquierda, producida por la sobrecarga de momento *cuádruplo*. El diagrama re-

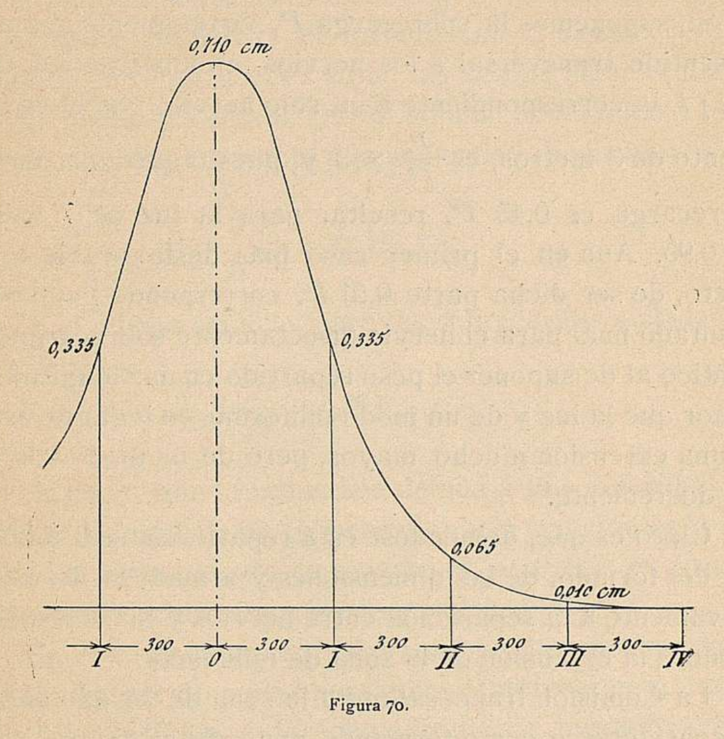
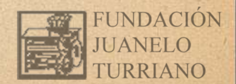


Figura 70.

presenta, en realidad, la línea de influencia sobre el nervio *O* de dicha sobrecarga, al circular normalmente al mismo; influencia que empieza á acusarse desde una distancia de ± 12 metros.

Si las flechas fueran exactamente proporcionales á los momentos, resultarían afectados los distintos nervios por fracciones de la sobrecarga iguales á 0, 510, 0, 200, 0, 035 y 0, 010 en *O*, ± *I*, ± *II*, ± *III*. Como es sabido, las flechas, para fuertes pesos, crecen más de prisa que éstos: así, para sobrecargas simplemente equivalentes á la normal, si bien



la zona de influencia es menor y sólo empieza en $\pm III$, las fracciones realmente soportadas por cada nervio son 0, 450, 0, 260 y 0, 010 en O, $\pm I$, $\pm II$.

Si suponemos la sobrecarga P, virtualmente repartida en sentido transversal á los nervios, en una fracción de la luz, fl, la correspondiente á un solo nervio, con el espaciamiento de 3 metros, es $\frac{P}{fl} \times 3$, y, puesto que esta parte de sobrecarga es 0,45 P, resulta, para la luz de 7 metros, $f = 0{,}95$. Aun en el primer caso más desfavorable á este efecto, de ser dicha parte 0,51 P, corresponde $f = 0{,}84$. El resultado final para el nervio directamente sobrecargado es idéntico al de suponer el peso repartido en una longitud algo menor que la luz y de un modo uniforme; en lugar de estarlo en una extensión mucho mayor, pero de un modo con rapidez decreciente.

Claro es que, debiéndose esta repartición real á la rigidez del forjado, de las dimensiones y armadura de éste relativamente á la separación entre nervios y luz de éstos, dependerá la extensión de la zona de influencia.

La Comisión francesa limita la zona de forjado que puede considerarse como formando una sola pieza en T con el nervio, á una anchura:

$$a = s\left(1 - \frac{s^2}{l^2}\right) \qquad (211)$$

para separación entre nervios, s, y luz de éstos, l. Establece además la restricción de que el término sustractivo, $\frac{s^2}{l^2}$, no se cuente por más de 0,50, aunque exceda de ese valor límite. Corresponde á él, $s = 0,707\, l$ y un ancho eficaz $a = 0,707 \times 0{,}5\, l = 0{,}35\, l$.



Para relaciones $\frac{s}{l}$ muy pequeñas no resulta lógico aminorar el ancho efectivo *s;* por lo contrario, se concibe que cuanto mayor sea la luz respecto á la separación, más uniformemente cooperará el forjado con el nervio, con más igualdad se repartirán en aquél las compresiones elementales. Es preferible establecer un mínimo más lógico y al mismo tiempo más favorable á la seguridad, haciendo:

$$\left(a = \frac{l}{3}\right) \leq s \qquad (212)$$

y, con el mismo criterio, para las sobrecargas aisladas:

$$\frac{l}{3} \times \frac{P}{fl} = 0{,}50\,P; \quad f = \frac{2}{3} \qquad (213)$$

Es decir, que la reducción debida á la solidaridad es 50 por 100 en lugar de 55, (observado), y la fracción de la luz, *f*, en la que virtualmente se reparte *P*, es 0, 667 en lugar de 0,84, (correspondiente á lo observado).

En el caso anterior interviene, implícitamente, la gran rigidez del nervio para hacer que se interese en la transmisión, ó repartición, á derecha é izquierda, una zona considerable de forjado. Si la fuerza *P* actúa en un punto de éste, entre nervios, las condiciones varían radicalmente.

El problema de la distribución de fuerzas concentradas es tan interesante como difícil y sólo susceptible de soluciones aproximadas. En realidad, la concentración no alcanza á hacerse sobre líneas ó sobre puntos, sino sobre fajas muy estrechas, un carril, ó sobre superficies muy pequeñas, la de contacto entre el carril y una rueda, ó entre ésta y un pavimento.

Supongamos primero (fig. 71) una fuerza concentrada,



que actúa sobre un cuerpo sin cohesión, nieve, por intermedio de un elemento lineal, un *ski*. Si éste no tiene rigidez ninguna, su efecto será nulo y el cuerpo que ejerce la fuerza P

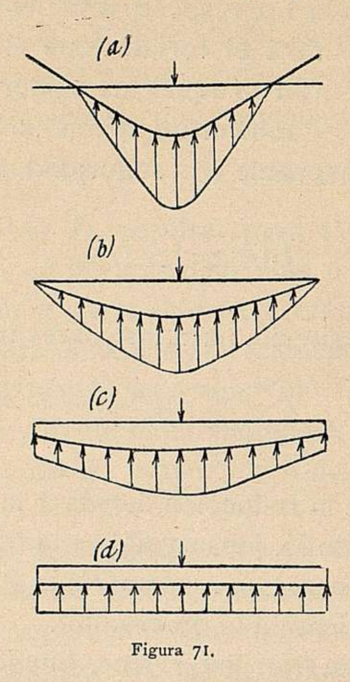


Figura 71.

se hundirá en la nieve. Para una cierta rigidez del *ski* tomará éste la forma (a), asentándose la nieve cantidades variables desde un máximo, bajo la línea de P, hasta cero, á distancias de ésta menores que $\frac{l}{2}$.

Para otra rigidez mayor, (b), la deformación del *ski* llegará á interesar toda su longitud, con un asiento de la nieve nulo en los extremos de aquél.

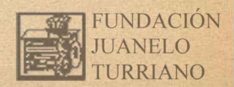
Conforme vaya aumentando la rigidez, (c), la curvatura del *ski* irá disminuyendo, y resultarán asientos de la nieve, de un cierto valor en los extremos, y crecientes de un modo regular desde allí hasta el centro.



Si la rigidez llega á ser muy grande, (*d*), (teóricamente infinita), la deformación será nula y uniformes los asientos de la nieve.

La deformación es debida siempre á las reacciones de la nieve, ejercidas de abajo arriba y repartidas según una ley que, lógicamente, podemos suponer sea la de proporcionalidad entre sus valores unitarios, p kilogramos por metro lineal (realmente, kilogramos por metro cuadrado, pero prescindimos del ancho del *ski* ó lo suponemos concentrado linealmente) y los asientos sufridos por la nieve. Las áreas de distribución de las reacciones serán todas iguales al valor de la fuerza concentrada: $\int p\,dl = P$ kilogramos. Cuanto mayor sea la rigidez, más se acercarán á la uniformidad los valores de p, reacciones de la nieve, ó bien, presiones unitarias sufridas por la misma, debidas á la repartición operada por el *ski*.

Si el cuerpo sobre que se apoya el elemento transmisor tiene una cierta cohesión, el fenómeno se altera. Reproduzcamos exagerando la escala el caso (*c*) (fig. 72): la rigidez del elemento, ahora un trozo de carril sentado sobre una losa de hormigón, es suficiente para que se interese toda su longitud: el hormigón cede, se comprime, más en el centro que en los extremos de aquél, pero no se produce, como en la nieve, un escalón, e, al pasar de un cierto asiento á otro nulo, sino una disminución gradual de los asientos del hormigón desde e', en el extremo del carril, hasta cero á una cierta distancia δ, (fig. 72) (*c'*). La distribución de reacciones se altera; las desarrolladas en el triángulo mixtilíneo de base δ, se transmiten lateralmente á la zona de los extremos, y la diferencia entre los valores de p, mínimos y máximos, se atenúa, tanto más cuanto mayor sea la cohesión de la losa.



Experimentalmente resulta que se puede suponer p uniforme é igual á $\frac{P}{l}$, siempre que el momento máximo:

$$\frac{P}{l} \times \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Pl}{8}$$

producido en el centro del trozo de carril de longitud l, sea

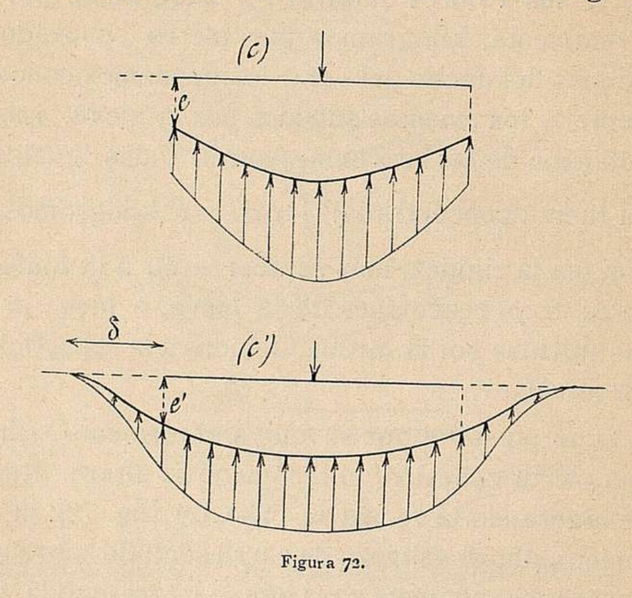


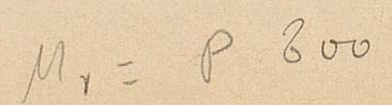
Figura 72.

soportado por éste con pequeña deformación, es decir, con una carga unitaria próximamente $\frac{2}{3}$ de la normal. Así, pues, la longitud de repartición es prácticamente:

$$M_r = P\,\frac{l}{8};\; l = 800\,\frac{M_r}{P} \qquad (212)$$

evaluando M_r, momento resistente en metros-kilogramos para una carga de 800 kilogramos por centímetro cuadrado.

Así, por ejemplo, un carril de 32,5 kilogramos por me-



tro lineal, con momento de resistencia, 131 cm.[3], reparte uniformemente la presión de 8.000 kilogramos, de una rueda de locomotora, en una longitud:

$$l = 8 \times \frac{800 \times 131}{8.000} = 104,8 \text{ cm}.$$

La flecha que, suponiéndolo cortado, toma, es, para $I = 838$ cm.[4]:

$$f = \frac{8.000}{2} \times \frac{(52,4 \text{ cm.})^3}{8 \times 2.250.000 \times 838} = 0,038 \text{ cm};$$

menos de 4 diezmilímetros; y en realidad, con el carril continuo, mucho menos. La distribución real de presiones resulta, (fig. 73), comprendida entre dos curvas, prácticamente

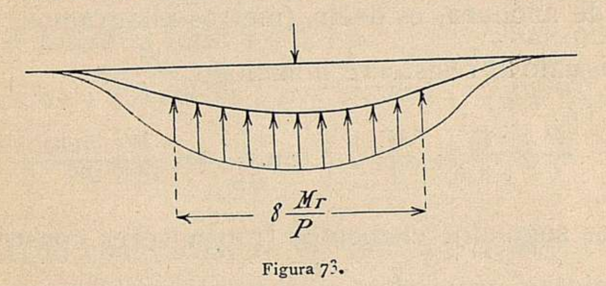
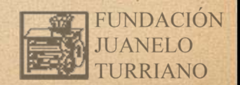


Figura 73.

paralelas en la extensión $800 \frac{M_r}{P}$, y rápidamente convergentes después, á uno y otro lado.

La longitud de repartición depende principalmente de la rigidez, proporcional al producto $E\,I$, y, por tanto, de la naturaleza del material que constituye el elemento transmisor. Si éste es de hormigón armado, mucho más rígido, á igualdad de momento resistente, que el acero, la expresión (212) subsiste para el valor ordinario de M_r, sin rebajar la carga unitaria corriente. Siempre, claro es, conviene, para el mis-



mo M_r, forzar lo buenamente posible la rigidez EI, aumentando el canto c.

La carga $\frac{P}{l}$, kilogramos por metro lineal en cada punto de la longitud l, se puede á su vez repartir en otra longitud l', orientada normalmente á l, y á razón de $\frac{P}{l} \times \frac{1}{l'}$ ó $\frac{P}{l\,l'}$, kilogramos por metro cuadrado, siempre que en cada punto haya un elemento transmisor de suficiente rigidez para que el momento máximo en este nuevo sentido:

$$\frac{P}{l} \times \frac{1}{l'} \times \frac{1}{2} \left(\frac{l'}{2}\right)^2 = \frac{P}{l} \times \frac{l'}{8};$$

(que ahora no es un momento absoluto, sino referido á la unidad de anchura, es decir, (metros-kilogramos por metro lineal), iguale al resistente homólogo, $\frac{M'_r}{l}$.

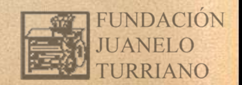
$$\frac{P}{l} \times \frac{l'}{8} = \frac{M'_r}{l}; \quad l' \text{ (cm.)} = 800 \, \frac{M'_r \text{ (m-kg.)}}{P} \qquad (213)$$

Estos segundos elementos transmisores constituirán, ó bien m piezas, separadas, $\frac{l}{m}$ entre ejes, cada una con un momento resistente absoluto:

$$\frac{M'_r}{l} \times \frac{l}{m} = \frac{1}{m} M'_r;$$

ó una sola pieza, placa ó losa, de ancho l y momento total M'_r. Lo primero sería un carril de largo l sobre otros varios; lo segundo, el mismo carril, ó un nervio saliente, sobre una placa ó forjado, de longitud l', quedando la carga, P kilogramos, distribuída uniformemente sobre el área $l\,l'$.

En la mayoría de los casos basta con la distribución li-



neal efectuada por el carril que, naturalmente, es paralelo á los nervios ó líneas de sustentación del forjado: éste, que salva el vano entre nervios, sólo necesita armaduras normales á ellos y su cálculo se reduce al de una pieza de ancho $l = 800 \frac{M_r}{P}$, que salva la luz entre los mismos, L, bajo la acción de su peso muerto y de una ó más sobrecargas P: sólo falta determinar el canto c y la sección total α.

La sobrecarga P se presenta á veces, desde luego repartida linealmente en una faja de escasa anchura: tal sucede en un muro, de ancho a centímetros, que pesa p kilogramos por metro lineal, y que debe ser cimentado sobre un terreno al que sólo se pueden imponer π kilogramos por centímetro cuadrado. Basta calcular una losa de ancho 1 centímetro y de longitud total $a + 2\,v = \frac{p}{100 \times \pi}$, bajo el momento producido en los vuelos v por la carga π, que es:

$$M' \text{ (m-kg.)} = \frac{1}{100} \times \frac{1}{2}\,\pi\,v^2 = \frac{\pi\,v^2}{200} \qquad (214)$$

determinando como siempre el canto c y la sección α para el ancho 1 centímetro.

Cuando el cimiento es el de un pilar, de sección rectangular, $a\,e$ centímetros cuadrados, pudiera reducirse al caso anterior limitando el ancho á la dimensión a, pero los vuelos resultarían, en general, muy grandes. Es más lógico empezar por determinar el mínimo de superficie, $l\,l'$, necesario para que la presión sobre el terreno sea π, con el mínimo de vuelos, que corresponde á $l = l'$, losa cuadrada de lado $l_1 = \sqrt{\frac{P}{\pi}}$; alargar la sección del pilar hasta l_1, formando nervios de anchura e y saliente $\frac{l_1 - a}{2} = s$, y calcular éstos



para el momento:

$$M \text{ (m-kg.)} = \frac{1}{100} \times \frac{1}{2} \pi l_1 \times s^2 = \frac{\pi l_1 s^2}{200} \qquad (215)$$

El forjado, cuyos vuelos serán $v = \frac{l_1 - e}{2}$, corresponderá al momento expresado por (214).

Si el pilar es cuadrado, e^2, se puede hacer lo mismo, con la saliente $s = \frac{l_1 - e}{2}$, ó bien establecer la basa cruciforme con dos nervios ortogonales, de ancho e, saliente $\frac{l_1 - e}{2}$, y para un momento $\frac{M}{2}$ (214) cada uno, así como armar el forjado en dos sentidos, calculando α para $\frac{M'}{2}$, (215).

Volviendo ahora á la repartición, no sobre terreno, sino sobre el mismo hormigón, como en el caso del carril, consideremos una fuerza concentrada, una rueda de un carro. Es práctica antigua, confirmada por recientes experimentos alemanes, admitir que á través de un afirmado de espesor f, la presión se reparte uniformemente, (fig. 74), en la exten-

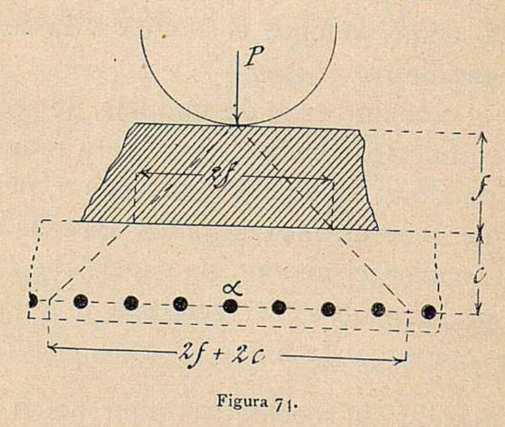


Figura 74.

sión $2f$, prescindiendo del ancho de llanta, λ, que algunos agregan. A través del hormigón, mucho más coherente que

el firme, la repartición debe hacerse más extensa, por lo ya dicho á propósito del decrecimiento de deformaciones (figura 72) (c'); es racional extender el mismo criterio que para el firme, y considerar interesadas en el equilibrio de la fuerza P todas las armaduras comprendidas en la extensión $2f + 2c$, ó $2(f + c)$, doble de la altura total desde las barras hasta la superficie del pavimento.

Se supone en lo anterior que el vehículo circula paralelamente á los nervios ó líneas de sustentación de la obra y, por tanto, en sentido normal á las armaduras del forjado.

Si éste tiene armaduras longitudinales, la zona $2(f + c)$ interesada por la fuerza P, será mayor, en razón de la rigidez que aquéllas le dan en ese sentido y que permite considerar el forjado como un carril de repartición.

Así, (fig. 75), análogamente á lo hecho, para un momen-

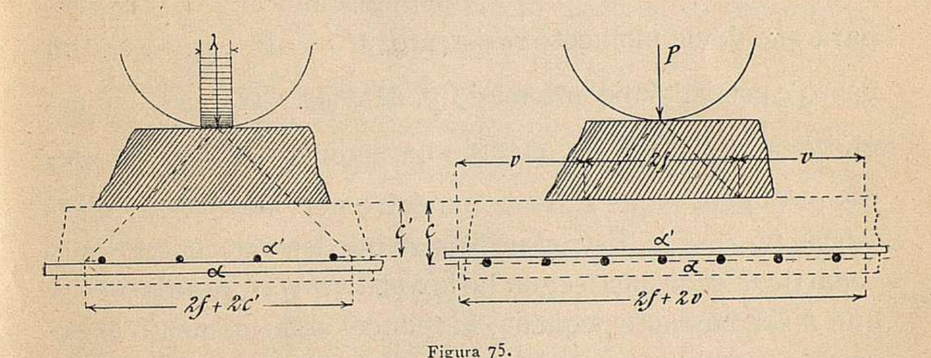


Figura 75.

to resistente longitudinal, M'_r, la zona interesada será la correspondiente al firme, más dos vuelos v; la carga lineal será $\frac{P}{2(v+f)}$ y la condición: $M'_r = \frac{v^2}{2} \times \frac{P}{2(v+f)}$, da:

$$v = 2\frac{M'_r}{P} + 2\sqrt{\left(\frac{M'_r}{P}\right)^2 + f\frac{M'_r}{P}}$$



ó, por defecto, despreciando $f \frac{M'_r}{P}$, $v = 4 \frac{M'_r}{P}$; y expresando l y f en centímetros y M'_r en metros-kilogramos:

$$l = 2f + 800 \frac{M'_r}{P} \tag{216}$$

es decir, la extensión que correspondería á la fuerza concentrada, (212), más la correspondiente al firme.

Se puede interesar, por tanto, la extensión que se quiera, á condición de armar longitudinalmente el forjado con la cuantía debida. El ancho de la zona que virtualmente actúa como carril es, con el criterio ya dicho y prescindiendo siempre de la llanta, $2(f + c)$, centímetros, medidos paralelamente á las armaduras principales del forjado ó á la luz que salva. Basta, por tanto, calcular una pieza de ancho $2(f + c)$ para que dé un momento resistente, $M'_r = P \frac{l - 2f}{800}$, con un canto c prudencialmente fijado y, después, otra pieza de ancho $l = 2f + 800 \frac{M'_r}{P}$, medido normalmente á las armaduras principales, que salve la luz entre nervios L, bajo una ó varias fuerzas P. Estrictamente se pueden considerar éstas repartidas cada una según la luz en $2(f + c)$; pero á menos que L sea bastante pequeña, la reducción de momento es escasa, y resulta más sencillo suponer P concentrada.

En la práctica se debe empezar por prescindir de la armadura longitudinal: si las dimensiones de la faja de forjado de $2(f + c)$ centímetros de ancho, en la luz L, resultan excesivas, fijar prudencialmente un ancho l y proceder entonces como antes.

Ejemplo.—Luz $L = 3$ metros; forjado semiempotrado, con 20 centímetros de firme; dos ruedas de 3.000 kilogramos



en la parte central á ± 35 centímetros del eje; las otras ruedas van sobre los nervios.

La zona de cada rueda es, suponiendo $c=15$, $2\times(20+15)$ $=70$ centímetros; hay, por tanto, 6.000 kilogramos repartidos en 140 centímetros, (± 70 del eje), y producen un momento:

$$\frac{6.000}{5} \times (3-0,7) = 2.760 \text{ m-kg.}$$

que, en la pieza de 70 centímetros de ancho y 15 de canto exige, una armadura muy fuerte, $(q > 0,020)$. Conviene armar longitudinalmente: supongamos $l=150$ centímetros: M'_r deberá ser $\frac{150-70}{800} \times 3.000 = 300$ metros-kilogramos, lo que exige, en el ancho 70, 2 centímetros cuadrados de barras $(q' = 0,002)$. A su vez el momento principal, 2.760, en la zona de 150 centímetros, requiere 18 centímetros cuadrados, $(q = 0,008)$.

En este ejemplo la zona central en que se reparte la acción de dos ruedas tiene un valor comparable con la luz, y vale la pena de tenerlo en cuenta al evaluar el momento flector principal.

El momento que podemos llamar *repartidor*, debido á las armaduras longitudinales, es:

$$M'r = \mu_1 \times q' \times 2\,(f + c') \times c'^2.$$

El canto en este sentido, c', es menor que en el sentido principal, c; se diferencia en la suma de radios de las barras α y α'. En el tanteo hemos confundido c con c'; al rehacer el cálculo, con los valores definitivos de las armaduras, se debe tener en cuenta dicha diferencia, que en general oscila alrededor de 1,5 centímetros. Como se ve, M'_r es casi proporcional al cubo de c'.



El momento principal, es:

$$M_r = \mu_1 \times q \times \left(2f + 800 \frac{M'_r}{P}\right) \times c^2.$$

y si suponemos, aproximando por defecto, $c = c'$, resulta que M_r se acerca á la proporcionalidad con la quinta potencia de c'. Conviene, por tanto, en pisos sometidos á sobrecargas concentradas, aumentar el canto, ó emplear pequeñas cuantías; el aumento de rigidez se traduce en una repartición mucho más extensa y en la cooperación de una mayor zona de forjado: en suma, en mejora de las condiciones mecánicas, al mismo tiempo que en economía.

Estudiemos ahora un caso muy frecuente en la práctica: un forjado que cubre un vano rectangular, entre dos muros, ó nervios principales, que dejan una luz, l y dos nervios secundarios, ó también muros, distanciados s, (fig. 76). El rectángulo, $l s$, soporta una sobrecarga total, P kilogramos, uniformemente distribuída.

La deformación de estas placas es sumamente variable y compleja, aun en el caso más sencillo de simple apoyo en su contorno; depende esencialmente de la rigidez, EI, y de la sobrecarga, P, y también de la relación $\frac{l}{s}$.

Si $\frac{P}{EI}$ es muy pequeño, (teóricamente nulo: $EI = \infty$), la sobrecarga se reparte uniformemente en todo el contorno $2(l + s)$, cualquiera que sea $\frac{l}{s}$. A medida que aumenta $\frac{P}{EI}$, la distribución á lo largo de los lados se altera, disminuyendo la presión unitaria en los vértices para ir aumentando hacia el centro, más rápidamente en los lados mayores que en los menores, y tanto más cuanto mayor sea $\frac{l}{s}$. Para cier-



to valor de $\frac{P}{EI}$, dicha presión llega á ser nula en los vértices, y para otro mayor, la placa deja de apoyarse en todo

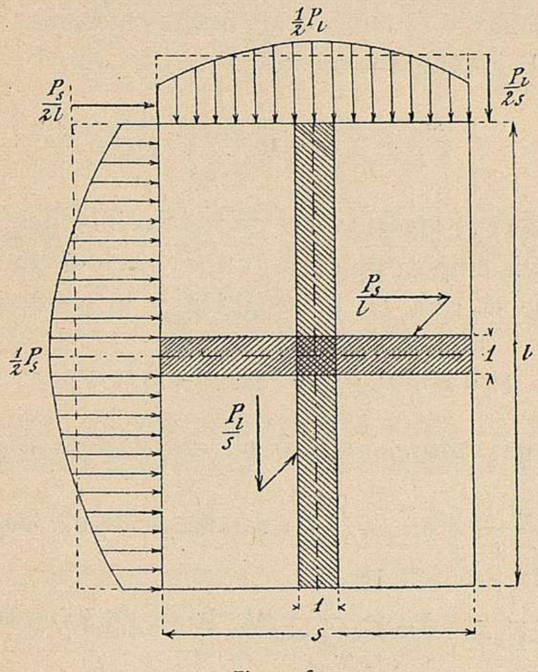


Figura 76.

el contorno, se levanta en los ángulos, y sólo refiere cargas á una fracción de los lados, que puede llegar á ser nula en los menores si $\frac{l}{s}$ alcanza cierto valor. Este caso se observa frecuentemente en las lápidas mortuorias de poco espesor, al cabo de algunos años.

En los casos usuales se admite que la sobrecarga total, P, se distribuye en dos partes, P_s y P_l, que gravitan sobre los lados l y s respectivamente; la flexión en un punto de la placa es la misma si se le considera perteneciente á una faja según la luz s, ó á otra normal, paralela á la luz l.



Admitiendo, á falta de mejor conocimiento, que las cargas medias por unidad de longitud $\frac{P_s}{2l}$ y $\frac{P_l}{2s}$ son proporcionales á las máximas, correspondientes á las fajas centrales de ancho unidad, é igualando las flechas máximas, relativas al centro del rectángulo, resulta:

$$f_s = \varphi \times \frac{s^3}{EI_s} \times \frac{P_s}{2l} = f_l = \varphi \times \frac{l^3}{EI_l} \times \frac{P_l}{2s}.$$

Los factores numéricos, φ, de las flechas deben ser los mismos, haya empotramiento, ó apoyo, en el contorno; los momentos de inercia I_s, I_l, también, y la condición se reduce á:

$$P_s \times s^4 = P_l \times l^4; \text{ y con: } P = P_s + P_l,$$

las sobrecargas *totales medias por unidad de ancho* serán:

$$P \times \frac{l^3}{l^4 + s^4} = p\, s \times \frac{l^4}{l^4 + s^4} \text{ paralelamente á } s \text{, sobre } l;$$

$$P \times \frac{s^3}{l^4 + s^4} = p\, l \times \frac{s^4}{l^4 + s^4} \text{ paralelamente á } l \text{, sobre } s.$$

La flexión en el vano menor, s, producirá, llamando $\frac{1}{m}$ la fracción numérica relativa al apoyo, semiempotramiento, etcétera:

$$M_s = p\, s \times \frac{l^4}{l^4 + s^4} \times \frac{s}{m} = p \frac{s^2}{m} \times \frac{l^4}{l^4 + s^4} \tag{217}$$

Análogamente, en el vano l:

$$M_l = p \frac{l^2}{m} \times \frac{s^4}{l^4 + s^4} = p \frac{s^2}{m} \times \frac{l^4}{l^4 + s^4} \times \frac{s^2}{l^2} \tag{218}$$

Bastará, por tanto, calcular el momento aparente por



unidad de ancho, $\frac{p s^2}{m}$, relativo al forjado indefinido de vano menor, s, y afectarlo, para calcular las armaduras paralelas á s y á l, por los coeficientes respectivos $\frac{l^4}{l^4 + s^4} = k_s$, $\frac{l^4}{l^4 + s^4} \times \frac{s^2}{l^2} = k_l$, cuyos valores son:

$\frac{l}{s} =$	1, 0	1, 1	1, 2	1, 25	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6	1, 75	
$k_s =$	0, 500	0, 594	0, 675	0, 709	0, 741	0, 793	0, 835	0, 868	0, 904	(219)
$k_l =$	0, 500	0, 491	0, 468	0, 454	0, 438	0, 405	0, 371	0, 339	0, 295	

En el caso más favorable, $s = l$, losa cuadrada, el momento se reduce á la mitad del correspondiente al forjado indefinido, es decir, á $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{24}$ de $p s^2$, en los tres casos de apoyo, semiempotramiento, ó continuidad, números mayores que los coeficientes $\frac{1}{20}$ á $\frac{1}{32}$, admitidos por los empíricos.

Cuando $\frac{l}{s}$ aumenta, la ventaja del doble apoyo se va perdiendo á medida que aquel valor se aleja de la unidad; la armadura paralela al lado mayor tiene una sección mayor que la economizada en el otro sentido respecto á la correspondiente al vano indefinido, y su longitud es mayor también. Así, á partir de $l = 1{,}5\, s$, conviene no tener en cuenta el contorno, sino los lados mayores solamente y emplear una sola armadura.

Si la carga es aislada y obra en el centro, parece lógico admitir que equivalga á otra, totalmente repartida, pero doble.



Si obra en una de las medianas, (fig. 77), la paralela á l, por ejemplo, y á una distancia l_1 del lado s más próximo, lo práctico es admitir que su efecto se circunscribe al rectán-

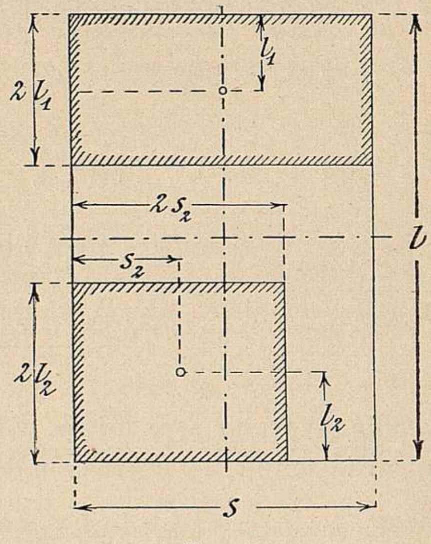
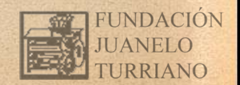


Figura 77.

gulo $s \times 2 l_1$ y calcular éste como sometido á una presión total $p_1 \times 2 s l_1 = 2 P_1$, ó unitaria $p_1 = \frac{P_1}{s l_1}$ extendiendo al total, $l s$, las armaduras así deducidas.

Si obra en punto cualquiera, determinado por sus distancias al contorno, s_2, l_2, se procede análogamente sobre el rectángulo $2 s_2 \times 2 l_2$ y se calcula sobre la base de $2 P_2 = 4 s_2 l_2 p_2$, ó $p_2 = \frac{P_2}{2 s_2 l_2}$

Todo lo dicho implica que las armaduras son iguales en sus longitudes respectivas, es decir, que el momento resistente es en cualquier punto igual al máximo de flexión. Esto, que parece muy exagerado, no lo es tanto si se considera que hemos partido de las cargas totales *medias* $\frac{Ps}{l}$ y $\frac{Pl}{s}$



sobre las bandas centrales, cuando las deformaciones acusan una distribución parabólica, y que en dichas bandas las cargas totales por unidad de anchura deben valer sensiblemente 1,5 veces más.

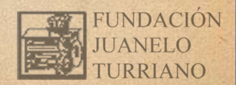
Por esta razón, una vez determinada la sección α_s correspondiente á 100 centímetros, que representa para todo el lado l, $\frac{ml}{100}$ barras separadas $\frac{100}{m}$ entre ejes, conviene distribuir ese número total, acortando la separación en el centro hasta $\frac{200}{3\,m}$ y aumentándola paulatinamente hasta los extremos.

Por otra parte, el hormigon armado es esencialmente democrático, dice *Rabut;* para que todos sus elementos se ayuden mutuamente conviene no establecer diferencias entre los de un mismo orden. Precisamente ya hemos visto que donde la acción de los momentos se va debilitando, van tomando más importancia los esfuerzos principales de tensión y que las armaduras primarias se aplican ventajosamente á combatir á éstos, á medida que van resultando superfluas respecto á aquéllos.

IV

Observaciones generales.

El cálculo de una construcción, cualquiera que sea su material, implica dos fases. En una se evalúan los efectos del peso muerto, sobrecargas, acción del viento, de los cambios de temperatura, etc., etc., hasta obtener un cierto número de valores, preferentemente los máximos, de los elementos auxiliares, momento flector, esfuerzo normal y esfuerzo



cortante. En la segunda se fijan concretamente las dimensiones de los elementos constructivos, si es posible hacerlo, de modo que las cargas no alcancen sus límites prácticos, (cálculo inductivo), ó se comprueba si dichas cargas son admisibles cuando aquellas dimensiones han sido previa y provisionalmente fijadas, (cálculo deductivo).

En realidad, las dimensiones, *à priori* desconocidas, de la construcción, intervienen siempre en la primera fase. Aun cuando la estructura sea estáticamente determinada, el peso muerto, la acción del viento, etc., funciones de aquéllas, son elementos importantísimos, mucho más en las obras de hormigón armado que en las metálicas. Así, pues, lo mismo en los sistemas isostáticos, que en los hiperestáticos, el cálculo sólo es posible mediante tanteos, empezando por determinar provisionalmente las indeterminadas é incógnitas del problema.

La mayor parte de los elementos constructivos metálicos son simétricos, ó forman conjuntos parciales también simétricos: además, una buena parte son de sección constante. Ambas cosas llevan consigo una gran simplificación del cálculo: importa conocer los máximos, y poco ó nada los valores intermedios cualquiera que sea su signo: la simetría geométrica y elástica permite prescindir de este último. Entiéndase que hablamos en general, salvando los casos de apurar las secciones, haciéndolas variables, y las cargas unitarias, teniendo entonces en cuenta la inversión de signo.

En las obras de hormigón armado la simetría es excepcional: la forma práctica, económica, racionalmente derivada de la heterogeneidad de los materiales y de la disimetría elástica de uno de ellos, es la asimétrica, ó más en general, la disimétrica. Importa conocer los máximos, sus signos é igualmente todos los valores, aun pequeños, que, al invertir



de signo, alteran totalmente la distribución de cargas moleculares.

Por ejemplo, aunque sea pequeña la entrega de un suelo plano en dos muros que lo soportan, se realiza allí un empotramiento imperfecto; el momento es negativo en una zona muy escasa. Si el suelo es de viguetas metálicas, lejos de haber inconveniente en ello, gracias á su simetría, las cargas serán menores que las calculadas en la hipótesis de simple apoyo. Si el suelo es de hormigón armado, el trabajo de tensión en la cara superior podrá llegar á producir fisuras, si no se altera la distribución de barras transformando la sección en disimétrica, ó en asimétrica inversa.

Cuando el suelo salva dos vanos, sostenido por un muro intermedio ó nervio, la inversión de momento es de mucha mayor importancia. Con las viguetas metálicas se prescinde de tenerlo en cuenta, por más que á veces pueda producirse un trabajo exagerado; pero con el suelo de hormigón, si no se disponen bien las armaduras, se rajará indefectiblemente.

Si se trata de piezas rectangulares expuestas á frecuentes inversiones de momento, no hay inconveniente alguno, antes ventaja, en adoptar el tipo de armadura simétrica, si los valores absolutos difieren poco, (fig. 78); el momento resistente será el mismo con cualquier signo.

Si hay diferencia notable, y las zonas de flexión más intensa tienen escasa longitud, (fig. 79), puede convenir una armadura general simétrica, que dé un momento resistente igual al mayor de los máximos próximamente iguales y que se transforme en disimétrica, por adición de algunas barras, solamente en la zona de momentos mucho mayores.

Por último, si la inversión es accidental y abarca una zona limitada, (fig. 80), podrá ser preferible la armadura ge-



neral asimétrica, ó disimétrica, transformada en disimétrica inversa, ó en simétrica, dentro de aquella zona.

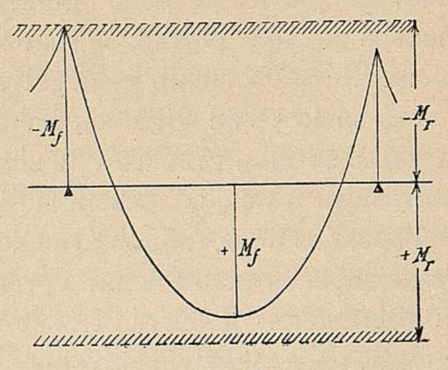


Figura 78.

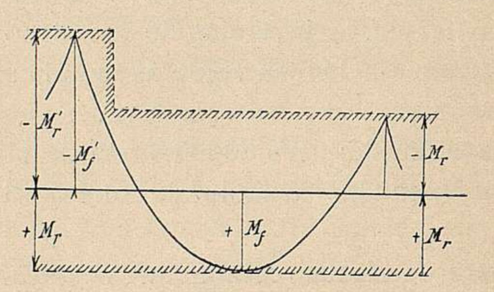


Figura 79.

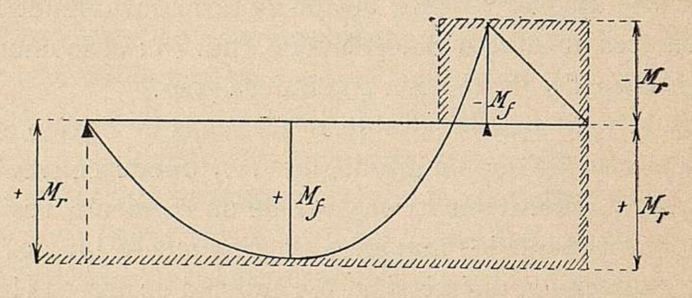


Figura 80.

Desde el momento en que la sección y, por tanto, el momento de inercia varían, se comete un error al aplicar las



expresiones generales de Mecánica, establecidas, en general, sobre la hipótesis de ser la sección constante. El error puede ser muy grande en las vigas continuas, porque la distribución de momentos flectores depende íntimamente de la de momentos de inercia; á medida que se aumentan éstos, reforzando la sección en cierta zona, crecen también los flectores dentro de la misma, aliviándose en cambio, en las otras regiones.

Cabe siempre, lo mismo que en vigas metálicas, calcular inductivamente las armaduras, sobre la hipótesis de sección constante, valiéndose de los métodos conocidos, (líneas de influencia, tablas, gráficos, etc.), y rehacer después el cálculo deductivo, teniendo ya en cuenta las variaciones de inercia. Pero es preferible, á todas luces, adoptar la armadura simétrica constante, á menos que implique un gran aumento de costo en las armaduras.

La economía realizada con las armaduras variables no es en general muy grande; para que las barras adicionales no constituyan, por sus finales, secciones críticas en que la brusca variación de momento estático y de carga de desgarramiento, D, pueda provocar fisuras, precisa prolongarlas lo suficiente para que la adherencia restablezca el equilibrio, y terminarlas en gancho, ó mejor, hacerlas descender, ó subir, utilizándolas en contrarrestar las cargas principales de tensión.

Si la pieza es una T, el problema es mucho más difícil; esa forma, la más racional y económica para resistir flexión en un sentido, sólo en muy pequeña escala se presta á sufrir la inversión de aquélla. Donde el hormigón está reducido á lo estrictamente necesario para envolver las armaduras y contrarrestar las cargas de desgarramiento, se localizan ahora las presiones, que, repartidas en pequeña superficie,



dan cargas muy elevadas. La armadura principal, que por tensión trabaja muy eficazmente, por compresión absorbe cargas muy escasas.

El forjado, ahora sujeto á tensiones, hay que armarlo longitudinalmente, acumulando las barras en un ancho poco mayor que el del nervio para que ayuden á éste de un modo más eficaz.

Como no sólo hay inversión de signo, sino también aumento grande en el valor absoluto del trabajo de flexión, hay que recurrir á uno de dos medios para reducir la carga máxima, H', á su límite.

1.° Reforzar la zona comprimida con varias barras, ó con hélices que formen un trozo de hormigón zunchado dentro del área de esa zona. Las cargas por desgarramiento horizontal, que generalmente no tienen importancia, en la zona comprimida la adquieren grande; el área de presiones disminuye al aumentar la cuantía respectiva, y aunque el máximo de H, sea admisible, sus diferencias de una fibra á otra, iguales á D, son muy intensas, particularmente al nivel de la armadura.

2.° Aumentar el área de compresión forzando el canto del nervio, es decir, quebrando su intradós con cartabones, (figura 81). Se acusa el mismo efecto del desgarramiento horizontal, pero sólo para sobrecargas mayores que con el refuerzo de armadura. Las cargas de compresión en el intradós son horizontales, y sólo llegan á interesar los cartabones mediante la transmisión por desgarramiento, que se hace más sensible en el arranque de aquéllos. Conviene, por tanto, suavizar el ángulo entrante, dando á los cartabones mayor longitud que altura y ganando la diferencia de ésta poco á poco. Las barras longitudinales inferiores conviene conservarlas sin cambio de dirección; de otro modo, el efecto del



ángulo sería más marcado. El refuerzo de los cartabones debe hacerse con barras especiales, que desborden esa zona y estén bien ligadas al hormigón con estribos; su carga, rela-

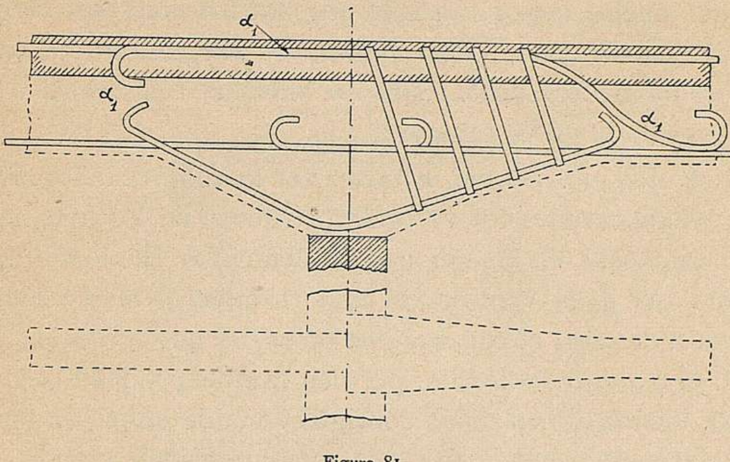


Figura 81.

tivamente elevada, las expondría, de no hacer esto, al pandeo local.

Puede, simultáneamente con el aumento de altura, hacerse un aumento gradual de anchura en la extensión ocupada por los cartabones, como se indica en parte de la figura 81, por más que esto complique algo el moldeo. De todos modos, en las *T* continuas conviene no escatimar la anchura del nervio y no forzar el peralte, á fin de que la eficacia de los cartabones pueda ser bien marcada sin darles una altura superior, cuando más, á la del mismo nervio. La longitud debe ser la suficiente para que, en el arranque, el momento resistente negativo de la sección rectangular $a_1\ c$, contando sólo el ancho del nervio, como armadura principal la superior, y como complementaria las barras que se conserven de la inferior, sea por lo menos una mitad del máximo en el apoyo. En éste hay que calcular la sección $a_1\ c_1$ con el má-

ximo del canto c_1; si las barras superiores no dan la sección necesaria, completarla con adicionales, α_1, (fig. 81), terminadas en gancho, ó, mejor, en inflexión y gancho, α'_1, utilizándola así mucho mejor, no sólo en contrarrestar las cargas principales oblicuas, (cuyo máximo se presenta ahora en la zona de momentos nulos), sino en la eficaz resistencia á las tensiones de la parte superior.

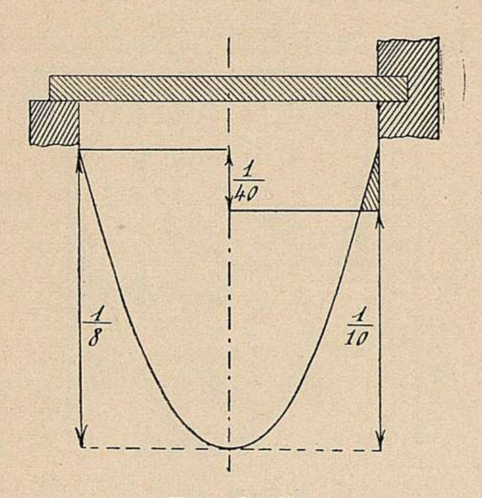
Los ejemplos aducidos hacen ver la importancia grande que tiene el estudio del verdadero trabajo en los apoyos ó, más en general, en las uniones de elementos. El monolitismo implica una gran ventaja, el empotramiento, más ó menos perfecto, de unos elementos con otros, lo que alivia, en general, el trabajo de flexión; pero en cambio produce otro especial, localizado en zonas contiguas á la de unión, en longitud relativamente pequeña, pero con intensidad grande, superior algunas veces á la alcanzada en el resto de la pieza.

Consideremos, como ejemplo, un forjado: si va sobre la coronación de muros, (fig. 82), no cabe duda de que está apoyado, y, sin embargo, la adherencia con aquéllos basta, á veces, para determinar un ligero empotramiento; no hay que tenerlo en cuenta al calcular la sección de la pieza, que corresponderá á una fracción, $\frac{1}{8}$, del producto $p\,l^2$; pero sí conviene siempre levantar algunas de las barras, tanto más cuanto mayor sea el peralte $\frac{c}{l}$.

Si los muros continúan hacia arriba, (fig. 83), el empotramiento parcial es efectivo, y se estima, prácticamente, que el momento máximo central corresponde á la fracción $\frac{1}{10}$, ó que aquél es $\frac{1}{40}$. En realidad es mayor, y aunque la reducción operada en la zona central no se tenga en cuenta



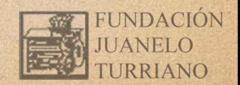
más que por sustituir el factor $\frac{1}{10}$ al $\frac{1}{8}$, conviene, en las zonas extremas, levantar por lo menos la tercera parte de las barras, es decir, contar para el efecto local con $\frac{1}{30}$.



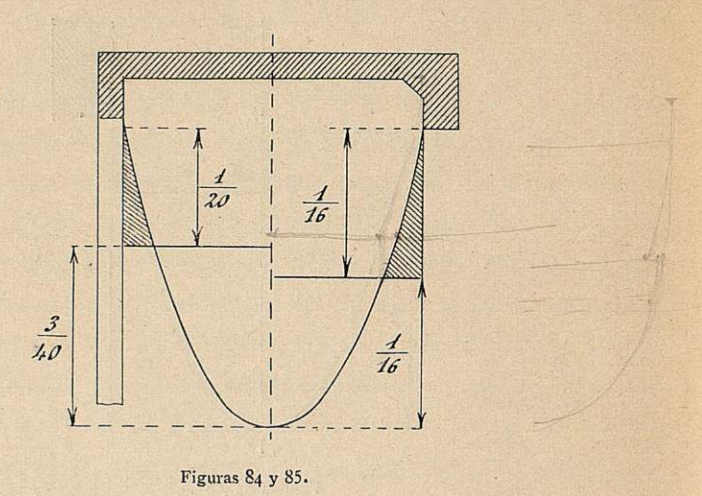
Figuras 82 y 83.

Si el forjado se suelda á nervios, (fig. 84), y éstos, bien por ir sobre pilares, bien por ser de poco canto relativamente á su luz, ofrecen cierta flexibilidad en el sentido del plano de la figura, el semiempotramiento variará según dicha flexibilidad, y según la rigidez de la unión entre forjado y nervio, pero no se deberá contar con menos de $\frac{1}{20}$. En la zona central el momento se reduce á $\frac{3}{40}$, pero no es prudente considerar sino los $\frac{4}{40}$ ó $\frac{1}{10}$. Conviene, por tanto, levantar la mitad de las barras.

Si los nervios, bien unidos con el forjado por fuertes cartabones, (fig. 85), son anchos, de poca luz y de muro á



muro, no sobre pilares, el semiempotramiento representa, por lo menos, tanto como el momento en la parte central, $\frac{1}{16}$ cada uno. Conviene, por prudencia, contar para dicha zona con $\frac{1}{12}$, y para las extremas, levantar lá mayor parte



Figuras 84 y 85.

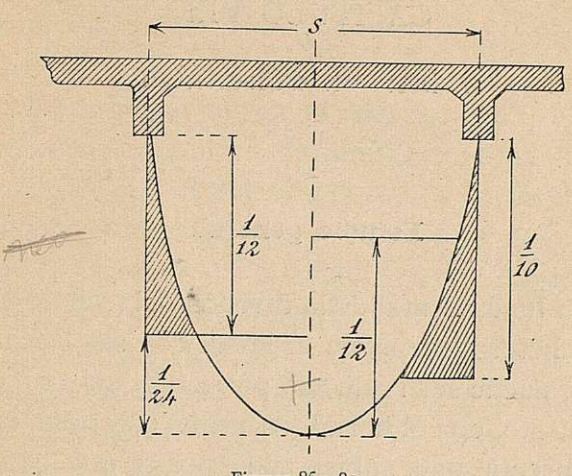
de las barras ó todas, lo que ningún inconveniente ofrece y sí ventaja desde todos puntos de vista.

Consideremos, por último, un forjado continuo, de unos cuantos tramos, (figuras 86 y 87). Si solamente son dos, hay en el apoyo central un máximo negativo, $\frac{1}{8}$, en el que influye muy poco el semiempotramiento de los extremos. En las partes centrales, el máximo, algo menor que $\frac{1}{14}$, se rebaja en la mitad del valor del semiempotramiento, valor que se estima como en los casos anteriores.

Si los tramos son 4 ó más, las sobrecargas uniformes *totales* obran, por virtud de la simetría, como si todas las uniones con los nervios fueran empotramientos perfectos.



Conviene tomar como luz la separación entre ejes, s, y los momentos debidos á aquellas acciones, prácticamente solo el peso muerto, son entonces $\frac{1}{12}$ y $\frac{1}{24}$ de ps^2. Para las



Figuras 86 y 87.

fuerzas aisladas ó las sobrecargas *parciales*, la deformación pierde esa simetría. Si los nervios se consideran como apoyos simples, los máximos negativos alcanzan á $0,12 = \frac{1}{8,33}$ y los positivos á $0,098 = \frac{1}{10,2}$; con la anchura y rigidez transversal de los nervios y el efecto de la solidaridad, dichos máximos están ampliamente comprendidos dentro de $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{12}$, y más todavía si se computan juntamente las cargas uniformes, (peso muerto), y las sobrecargas uniformes parciales.

CAPÍTULO VIII

HORMIGÓN ZUNCHADO

I

Estudio general.

La idea fundamental de la división del trabajo entre dos materiales heterogéneos, en armonía con sus aptitudes de resistencia, puede ser realizada por modo directo, como ya queda expuesto, con el hormigón armado, y también de una manera indirecta, que, si bien no se presta más que á determinada forma de trabajo, ofrece preciosas cualidades y vasto campo de aplicaciones, con el hormigón zunchado.

En el primero, el hormigón toma para sí las presiones y deja á la armadura neutralizar las tensiones que directamente se originan. En el segundo, el hormigón, sin perjuicio de absorber una parte de la fuerza exterior, *transforma* el resto y lo *transmite* íntegramente á la armadura, que lo recibe y equilibra en forma de tensiones.

El hormigón zunchado, debido al eminente Ingeniero *Considère,* no es sino la aplicación racional, científicamente estudiada y llevada á la práctica, de la utilización, tan antigua como usada, en multitud de formas, de un cuerpo intermedio como *transformador de presiones en tensiones.*

Una materia pulverulenta, un líquido, un gas, contenidos lateralmente en un cilindro cerrado por dos émbolos, reciben las presiones ejercidas sobre éstos y las transmiten al



cuerpo de bomba, en el que originan exclusivamente tensiones. En los dos últimos casos, por la falta de cohesión y de rozamiento en el cuerpo intermedio, la totalidad de la presión externa es transmitida á la envolvente; en el primero sólo llega á ésta una fracción, la no absorbida por el rozamiento del cuerpo pulverulento.

Si en lugar de ser tal, es un cuerpo sólido, de una cierta cohesión, la parte alícuota transmitida es todavía menor; el cuerpo, bajo la acción del esfuerzo total, se deforma transversalmente y transmite así al cilindro lo que no basta á equilibrar su cohesión. Si el esfuerzo crece hasta vencerla, el cuerpo se fragmenta ó se pulveriza; la fracción transmitida se hace mucho mayor; pero mientras la envolvente resista *de un modo elástico* las tensiones engendradas, el conjunto subsiste sin peligro alguno.

Ya hemos visto (cap. 3.°, II) que las piezas sometidas á compresión, sin rozamiento en las bases, se rompen *por tensión,* producida por las cargas principales, orientadas normalmente al eje, y que cuando existe rozamiento en aquéllas, el fenómeno es análogo, salvo que las cargas principales son oblicuas al eje. El zunchado, continuo en el caso del cilindro, discontinuo en el de los cercos transversales allí estudiados, contrarresta más ó menos perfecta y directamente el henchimiento transversal y equilibra ó absorbe las resultantes de dichas cargas principales. Las armaduras primarias, paralelas al esfuerzo, se limitan á absorber una parte de aquél, la correspondiente á igualdad de acortamientos con el hormigón, á cuya resistencia suman la suya, sin influir en nada en las deformaciones transversales del conglomerado.

Consideremos nuevamente el cuerpo de bomba, de radio ϱ, altura a y espesor e, relleno de una materia pulverulenta, sin cohesión, de ángulo de rozamiento φ.



Una presión unitaria, p_v, ejercida por el émbolo, se transforma en otra presión, que actúa en toda la superficie interior del cilindro:

$$p_h = \frac{p_v}{\operatorname{tang}^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{p_v}{k};$$

que, en un líquido, $\varphi = O$, $k = 1$, da $p_h = p_v$.

La carga unitaria del metal del cuerpo de bomba es:

$$A = \frac{p_v}{k} \times \frac{\rho}{e}; \text{ de donde } p_v = k\,A \times \frac{e}{\rho}$$

y, por tanto, el esfuerzo total del émbolo es:

$$P = \pi\,\rho^2 \times p_v = \pi\,k\,A \times e\,\rho;$$

y su relación al volumen del metal que forma el cuerpo de bomba:

$$\frac{\pi\,k\,A \times e\,\rho}{2\,\pi\,\rho \times a\,e} = \frac{k}{2} \times \frac{A}{a} = C_z \qquad (220)$$

En un cilindro de hormigón armado, del mismo radio y altura, armado con el mismo volumen de metal, $\alpha = 2\,\pi\,\varrho \times a\,e$, la relación homóloga, entre el esfuerzo total soportado por la armadura y el volumen de ésta, es:

$$\frac{A \times \alpha}{\alpha \times a} = \frac{A}{a} = C_a \qquad (221)$$

La razón de esas dos expresiones, *características de efecto útil*, que representan ó miden el incremento de resistencia obtenido por unidad de volumen de metal, es $\frac{k}{2}$ cuando la carga A llega á ser la misma, es decir, cuando se



utiliza igualmente en las dos formas la resistencia específica de aquél.

La ventaja de emplear el acero en zunchado en lugar de barras longitudinales, está representada por $\frac{k_1}{2}$. k_1 es el valor numérico que corresponde á la relación $\frac{p_v}{p_h}$ en el hormigón, valor evidentemente mayor que $\tang^2\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$ relativo al rozamiento sin cohesión, y que, experimentalmente, resulta 4,8. El zunchado es, por tanto, 2,4 veces más útil que el armado longitudinal.

El estudio del hormigón zunchado, hecho primero por *Considère*, ha sido repetido por la Comisión francesa, de la que formaba parte él mismo, en condiciones que nada dejan que desear. La experimentación ha versado sobre 200 piezas, divididas en series, de modo que la influencia de cada una de las variables del problema pudiera ser perfectamente apreciada.

Así ha habido piezas: de mortero, con riquezas de 300 á 1.100 kilogramos por metro cúbico; de hormigón, entre 300 y 800; uno y otro han variado, desde la consistencia de papilla fluida, sin apisonado, hasta la de masa húmeda, enérgicamente batida; las armaduras han sido colocadas con gran esmero, ó irregularmente. Las longitudes han variado de 8 á 400 centímetros; los diámetros, de 3 á 70; las cuantías, desde 0, 010 hasta 0, 140, y, por último, la edad, en el momento del ensayo, ha oscilado entre ocho y doscientos días. El zunchado ha sido siempre discontinuo, es decir, obtenido con hélices de corto paso, anegadas en el hormigón.

Además se han experimentado series de tres prismas de igual sección y altura, de un mismo hormigón, sin armar, armado longitudinalmente y zunchado, midiendo las cargas



unitarias de rotura, H, H_a, H_z, respectivamente, y las cuantías q_a, q_z ó relaciones de volumen $\frac{\text{metal}}{\text{hormigón}}$, para conocer las características de efecto útil:

$$C_a = \frac{H_a - H}{q_a};\ C_z = \frac{H_z - H}{q_z}$$

En lo siguiente resumimos los resultados de esa experimentación.

El hormigón armado, (sólo con barras longitudinales), no soporta, sin aplastarse, acortamientos unitarios superiores, en general á 0, 000 8, excepcionalmente hasta 0, 001 4; lo que supone en las barras una carga de 1.800 á 3.150 kilogramos por centímetro cuadrado, es decir, generalmente inferior, á lo sumo igual, á la carga límite elástica.

El hormigón zunchado soporta de un modo análogo hasta 0, 030 0, y con fuertes cuantías, hasta 0, 120 0, por compresión uniforme; por flexión, las fibras más cargadas llegan á alcanzar el enorme tipo unitario de 0, 200 0.

Para cerciorarse hasta la saciedad de que tales efectos se deben exclusivamente al zunchado, se sustituyó el obtenido con hélices metálicas por el realizado por agua comprimida. Los cilindros de hormigón, perfectamente impermeabilizados, introducidos en un cuerpo de prensa hidráulica, con doble junta de cuero en *U* en cada extremo, soportaron cargas unitarias, variables de 170 á 935 kilogramos por centímetro cuadrado, correlativamente con tales acortamientos y con presiones laterales de 0 á 150 atmósferas.

La ductilidad del hormigón zunchado es enorme, y en ella influye relativamente poco la calidad del conglomerado.

El coeficiente de elasticidad resultante parece ser, á igualdad de cuantía y de carga unitaria, algo menor en el hormigón zunchado que en el armado.



La parte de hormigón exterior á las espiras del zunchado comienza á fisurarse cuando la carga unitaria, referida á la totalidad de la sección, *alcanza de 1,3 á 1,7 veces la carga de rotura en cubos,* H_{rc}; y salta, quedando subsistente el núcleo, de un diámetro igual próximamente al medio de las hélices. Sobreviene esa fragmentación superficial cuando el acortamiento unitario es alrededor de 1,6 veces el que inmediatamente precede á la rotura de un hormigón de igual calidad armado longitudinalmente.

Si se combinan las dos formas de asociación del metal, (figura 88), en barras helizoidales y longitudinales, éstas en

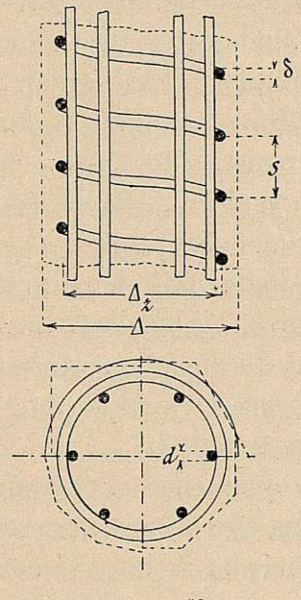
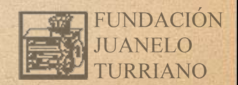


Figura 88.

nada influyen sobre el hormigón, y como en el caso ordinario, agregan simplemente, á la resistencia del mismo, la suya propia, correlativa con su acortamiento.



Mientras que el hormigón armado ordinario se rompe de un modo brusco cuando sus deformaciones superan los pequeñísimos límites indicados, sin que previamente se note alteración sensible en la ley de crecimiento de aquéllas, es decir, sin que pueda observarse el paso del régimen inicial, perfecta, ó casi perfectamente, elástico, al final, inmediato á la rotura, el hormigón zunchado se comporta de muy distinta manera.

En un primer período que, si en rigor no lo es, podemos considerar perfectamente elástico, las deformaciones son muy pequeñas y su proceso análogo al correspondiente en el hormigón armado. Alcanzados los valores que en este último producen la rotura brusca, sobreviene un nuevo período de acortamientos rápidamente crecientes; aparecen grietas superficiales, y concluye por fragmentarse y desprenderse toda la cáscara exterior á las hélices. En un tercer período, el núcleo continúa resistiendo; sus acortamientos aumentan con mayor rapidez, y al final, bajo presiones y deformaciones enormes, sobreviene la rotura.

La agregación molecular del hormigón se altera muy poco dentro del primero y aun en parte del segundo período, hecho comprobado directamente midiendo la carga de rotura de cubos labrados con el hormigón antes zunchado y sometido á aquellos períodos.

Para que la envolvente salte, dejando sólo el núcleo zunchado, la carga tiene que haber superado con creces la que en condiciones ordinarias produce la rotura.

Así, pues, en la práctica, en la que sólo se realizan insignificantes deformaciones, la resistencia del hormigón zunchado puede ser considerada como constante, á partir del momento en que aquéllas han alcanzado su mayor valor. Fenómeno es éste, homólogo del que presenta el hormigón



armado, cuya tensión se mantiene constante una vez excedido el límite de elasticidad y entrado dentro del período plástico.

La permanencia, ó la reiteración de cargas, producen el mismo efecto ya conocido, (cap. 2.°, III), de ir elevando el límite elástico hasta el valor de aquellas mismas. La figura 24 es exactamente aplicable á este caso, que tan sólo difiere del allí estudiado en los valores, ahora mucho más altos, que puede alcanzar la carga límite elástica.

La retracción de fraguado, que con armaduras longitudinales crea un estado inicial de tensiones, desfavorable al hormigón, tiene ahora un efecto completamente distinto. Mientras el núcleo zunchado no empiece, bajo las cargas desarrolladas por una presión axial, á sufrir henchimiento transversal, que compense la retracción en ese mismo sentido, las armaduras en hélice nada trabajan. Sólo comienzan á hacerlo cuando aquella deformación, siempre pequeña, 0,3 á 0,4 del acortamiento longitudinal, basta para iniciar el alargamiento de las espiras.

Si coexisten con ellas barras longitudinales, que la retracción ha puesto en un régimen inicial de presiones, el metal del zunchado empieza á trabajar mucho después que el de la armadura, cuando la carga unitaria de ésta alcanza un valor bastante alto, necesario para que el henchimiento sea el ya dicho. En suma, el acero empleado en forma de hélice se utiliza en contrarrestar acciones *retardadas* y previamente *debilitadas:* de aquí su efecto útil, mucho mayor que empleado en la forma ordinaria.

El hormigón zunchado presenta, en resumen, cualidades preciosas para resistir enormes compresiones, bien sean generales, bien localizadas en una zona de una pieza, en flexión sencilla, ó compuesta. Por desgracia, si su resistencia espe-



cífica aumenta en gran escala, el coeficiente de elasticidad no se altera, ó más bien desciende un poco.

El peligro del pandeo impide apurar hasta lo último esa enorme resistencia, pero siempre permite alcanzar límites inasequibles al hormigón armado.

En el caso más frecuente de la flexión compuesta, aquel en que domina el trabajo por compresión, como en los puentes de arco, el hormigón zunchado permitirá realizar rebajamientos y luces mucho mayores que hasta ahora.

II

Cálculo y ejemplos.

La conclusión práctica, resultado final de la prolija experimentación referida, es la siguiente:

La resistencia total al aplastamiento del núcleo de una pieza de hormigón zunchado, es, como mínimo, igual á la suma de:

1.° La resistencia del hormigón solo, computada para una carga vez y media mayor que la de rotura en cubos;

2.° La que produce la armadura longitudinal bajo una carga igual á la límite elástica;

3.° La correspondiente, bajo esa carga límite, á otra armadura longitudinal ficticia, cuyo volumen sea el mismo de la helizoidal, multiplicado por la relación de coeficientes de efecto útil.

Esta relación se fija, por prudencia, en 2,1, aunque su valor sea más bien, 2,4.

Así, la carga práctica de aplastamiento, supuesto que no se presente antes el pandeo, es, referida á la sección del núcleo, de diámetro igual al medio de las hélices:

$$H_{rz} = 1{,}5\ H_{rc} + A_l\ (q_a + 2{,}1\ q_z) \qquad (222)$$



ó, para $A_l = 2.400$ kilogramos por centímetro cuadrado:

$$H_{rz} = 1{,}5\ H_{rc} + 2.400\ q_a + 5.100\ q_z\ . \qquad (223)$$

Pero es más cómodo referirse á la sección total de la pieza que á la del núcleo. La relación de secciones es generalmente $\frac{3}{2}$, y la de diámetros $\sqrt{1{,}5} = 1{,}22$; y $\Delta_z = 0{,}816\ \Delta$.

Refiriendo también las cuantías á la sección total, al hacer $q' = \frac{3}{2}\ q_a$; $q'' = \frac{3}{2}\ q_z$, la carga unitaria de rotura, es entonces:

$$H_z = H_{rc} + 2.400\ q' + 5.100\ q''. \qquad (224)$$

La carga práctica, expresada por:

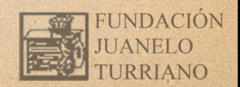
$$H_{cz} = H_c\ (1 + 16\ q' + 32\ q''), \qquad (225)$$

implica un coeficiente de seguridad *real*, que oscila ligeramente alrededor de $\frac{1}{0{,}28} = 3{,}57$, al que corresponde la carga práctica ordinaria del hormigón solo, $H_c = 0{,}28\ H_{rc}$.

Las condiciones para que esta expresión pueda ser aplicada con tal seguridad son las siguientes:

1.ª Cualesquiera que sean q' y q'', H_{cz} no debe exceder del valor para el que se inicia la fisuración de la parte superficial, es decir, de 0,60 H_{rc}. El trinomio amplificador $(1 + 16\ q' + 32\ q'')$ no puede ser contado por más de $\frac{0{,}60}{0{,}28} = 2{,}14$. Con los hormigones de 300 y 400 kilogramos por metro cúbico, cuyas H_c son 45 y 56 kilogramos por centímetro cuadrado, la máxima carga aparente, H_{cz}, no podrá, pues, superar 96 y 120 kilogramos por centímetro cuadrado, por fuertes que sean las cuantías de ambas armaduras.

2.ª El número de barras longitudinales debe ser, por lo



menos, 6; su diámetro no ha de exceder del vigésimo del total, y la cuantía q' no podrá bajar de 0, 005.

3.ª La separación, ó paso, de las espiras debe ser, como máximo, 0,20, 0,15, 0,12 y 0,10 del diámetro total Δ, para que las cargas aparentes puedan alcanzar 60, 80, 100, 120 kilogramos por centímetro cuadrado, respectivamente. La cuantía, q'', ha de ser, como mínimo, 0, 015, y, en general, triple, por lo menos, de q'.

La doble armadura, (fig. 88), constituye así una jaula, de malla bastante espesa para que el zunchado discontinuo ejerza sobre el núcleo una acción prácticamente igual á la del zunchado continuo sobre un cuerpo pulverulento.

El trinomio amplificador de H_c, en general $(1 + r' q' + r'' q'')$, difiere muy poco del producto de los dos binomios $(1 + r' q')(1 + r'' q'')$ que, como vimos, (cap. 3.°, II), expresa la amplificación total de H_c en una pieza con armaduras primaria y secundaria, es decir, con zunchado elemental, hecho con cercos rectangulares ó cuadrados. El término que falta, $r' q' \times r'' q''$, tiene un valor bastante pequeño, 0, 038 4 para $q' = 0,005$, $q'' = 0,015$. Como de todos modos la amplificación no puede superar á 2,14, podría darse á la expresión (225) la misma forma general (32), pero no vale la pena. En esta última, en que q'' es generalmente muy pequeño, sí lo vale, para apurar, en lo posible, la favorable influencia de aquella armadura.

Concretemos ahora la influencia del pandeo. Las piezas comprimidas peligran: por aplastamiento, si la esbeltez es muy pequeña; por pandeo, si es grande. Para un valor intermedio, uno de los usuales, de la esbeltez, la fase crítica, el peligro de rotura, se puede hacer que corresponda á una ú otra causa, forzando ó aligerando las armaduras, principalmente la helizoidal. Hay, prácticamente, para cada esbeltez



una cuantía crítica, q_c'', á la que corresponde *igual* peligro de rotura por aplastamiento que por pandeo.

Lo más conveniente sería determinar, teórica ó experimentalmente, esos valores de q_c'' correlativos con los de la esbeltez, y tomar, como presión total admisible, la parte alícuota, correspondiente al coeficiente de seguridad, de la fuerza que produciría, *á un tiempo,* pandeo y aplastamiento.

No lo ha hecho así la Comisión francesa, sino que ha determinado las cargas unitarias aparentes, H_{cz}, relativas á la sección total, admisibles *en perfectas condiciones de seguridad,* para esbeltez variable de 10 á 20. Siguen una ley muy regular, de la que por inter y extrapolación, deducimos, más detalladamente, los valores H_{pz}, relativos á hormigón de 300 y 400 kilogramos por metro cúbico, consignados en el siguiente cuadro, (226):

$\frac{l}{\Delta}$	$\frac{l^2}{\rho^2}$	$\frac{0,28}{1+f\,\frac{l^2}{\rho^2}}$	H_{pz} (300)	H_{pz} (400)	$H_{pz} \times \frac{\pi\,\Delta^2}{4\,l^2}$ (300)	$H_{pz} \times \frac{\pi\,\Delta^2}{4\,l^2}$ (400)	
10	1.600	0, 60	96,0	120	0, 754	0, 942	
12	2.304	0, 52	83,2	104	0, 454	0, 567	
14	3.136	0, 46	73,6	92	0, 294	0, 368	(226)
16	4.096	0, 42	67,2	84	0, 206	0, 258	
18	5.184	0, 39	62,4	78	0, 151	0, 189	
20	6.400	0, 37	59,2	74	0, 116	0, 145	
22	7.744	0, 36	57,6	72	0, 093	0, 117	
25	10.000	0, 35	56,0	70	0, 070	0, 088	

Como hicimos en su homólogo, (44) (cap. 3.°, II), para cada esbeltez geométrica, $\frac{l}{\Delta}$, consignamos: la relación $\frac{l^2}{\rho^2}$, cuadrado de la esbeltez mecánica, y el factor de reducción total, $\frac{0,28}{1+f\frac{l^2}{\rho^2}}$, que involucra el coeficiente de seguridad corriente y el especial necesario para prevenir el pandeo, factor al que, por analogía, conservamos su forma racional, por más que sus valores numéricos sean exclusivamente experimentales.

Las dos últimas columnas contienen los valores de $H_{pz} \times \frac{\pi\Delta^2}{4l^2}$, que permiten, como ya vimos, evitar un penoso tanteo; basta buscar entre ellos el más próximo al de $\frac{P}{l^2}$ para obtener directamente, ó por una sencilla interpolación, la esbeltez y la presión aparente admisibles. En efecto: en un círculo:

$$P = H_{pz} \times \frac{\pi\Delta^2}{4}; \qquad \frac{P}{l^2} = H_{pz} \times \frac{\pi\Delta^2}{4l^2}$$

El cálculo deductivo es sencillísimo. El inductivo no lo es menos, en la forma siguiente:

Para no limitarnos á la sección circular, de moldeo enojoso, la sustituímos por un polígono regular de 4, 6, 8 ó 12 caras, de la misma área, condición que determina el diámetro, D, del círculo inscrito en el polígono, en función del diámetro, Δ, de la sección circular equivalente, magnitud que tomamos por módulo (fig. 88).

El diámetro medio del zunchado, para que el área del núcleo sea $\frac{2}{3}$ de la total, es siempre 0, 816 Δ.

La condición económica induce, como en el hormigón



armado, á disminuir lo posible las cuantías; la unidad de resistencia se obtiene á menos coste con hormigón que con armaduras. La ventaja de éstas estriba en la reducción de dimensiones.

Consideramos dos cuantías tipos: $q' = 0,005$, ó $0,010$, con $q'' = 0,015$, ó $0,030$, según la condición 3.ª ya dicha.

Para un número m de barras longitudinales, siempre ≥ 6, su diámetro, que por la primera condición $\leq 0,05\ \Delta$, está determinado por:

$$\frac{\frac{1}{4} m \pi d^2}{\frac{1}{4} \pi \Delta^2} = q'; \quad d = \Delta \sqrt{\frac{q'}{m}} \qquad (227)$$

Para un paso, ó separación, entre ejes de espiras, s, que por la condición 3.ª tiene ya un máximo según varíe la carga admisible, el diámetro δ, de la barra helizoidal, está determinado por la expresión de la cuantía:

$$q'' = \frac{\text{zuncho}}{\text{hormigón}} = \frac{\frac{100}{s} \times (\pi \times 0,82\ \Delta) \times \frac{\pi \delta^2}{4}\ (\text{cm}^3)}{100 \times \frac{\pi \Delta^2}{4}\ (\text{cm}^3)}$$

$$= 2,57 \frac{\delta^2}{s\ \Delta} \qquad (228)$$

El cuadro á continuación, (229), resume todos estos datos. En función del módulo Δ, diámetro de la pieza circular determinado por el valor $\frac{P}{l^2}$ en el cuadro (226) están definidos (fig. 88):

D, diámetro del círculo inscrito en el polígono regular que se adopte;



Δ_z, diámetro medio de las espiras;

d, de las barras longitudinales, según la cuantía q' y número m que se fije;

s, m, δ, separación entre espiras, número de éstas en metro y diámetro de la barra que las debe formar, según la presión aparente, H_{pz}, que del cuadro (226) haya resultado y la cuantía q'' elegida.

Ejemplo.—Pilar de 10 metros de altura para 250 toneladas.

$\frac{P}{l^2} = \frac{250.000 \text{ kg.}}{1.000.000 \text{ cm}^2} = 0,25$; corresponde, para hormigón de 400 kilogramos por metro cúbico, $\frac{l}{\Delta} = 16$, ó $\Delta = \frac{1.000}{16} = 62,5$. Como 0, 25 es algo menor que 0, 258 lo podemos dejar en 62 centímetros. La presión aplicable es 84, que, efectivamente, da:

$$84 \times 3.019 \text{ cm}^2 = 253.596 \text{ kg.}$$

Nos conviene, por ejemplo, hacerlo octogonal; el diámetro del círculo inscrito será:

$$0,974 \times 62 = 60,38 \text{ ó } 60 \text{ cm.}$$

y el diámetro medio del zunchado:

$$0,82 \times 62 = 50,84 \text{ ó } 51 \text{ cm.}$$

Las barras longitudinales serán, poniendo 8, de diámetro $0,025 \times 62 = 1,55$ ó 1,6 centímetros, si la cuantía es 0, 005.

Como H_{pz} es poco mayor que 80,

$$\delta = 0,029\,\Delta = 1,798 \text{ ó } 1,8 \text{ cm.}$$

La separación, *s*, de las espiras debe ser algo inferior á $0,15\,\Delta = 9,3$ centímetros; tomaremos 9,1 que da 11 espiras en metro.

Sección. (229)

	Círculo.	Cuadrado.	Hexágono.	Octógono.	Dodecágono.
D	1, 000 Δ	0, 886 Δ	0, 952 Δ	0, 974 Δ	0, 987 Δ
Δ_z	0, 816 Δ				

Armadura recta.

	$q' = 0, 005$			$q' = 0, 010$		
	6	8	12	8	12	16
d	0, 029 Δ	0, 025 Δ	0, 020 Δ	0, 035 Δ	0, 029 Δ	0, 025 Δ

Armadura helizoidal.

	$q'' = 0, 015$				$q'' = 0, 030$			
	60	70	80	90	90	100	110	120
s	0, 20 Δ	0, 17 Δ	0, 15 Δ	0, 13 Δ	0, 13 Δ	0, 12 Δ	0, 11 Δ	0, 10 Δ
m	$\frac{500}{\Delta}$	$\frac{588}{\Delta}$	$\frac{667}{\Delta}$	$\frac{769}{\Delta}$	$\frac{769}{\Delta}$	$\frac{833}{\Delta}$	$\frac{909}{\Delta}$	$\frac{1.000}{\Delta}$
δ	0, 034 Δ	0, 031 Δ	0, 029 Δ	0, 027 Δ	0, 039 Δ	0, 037 Δ	0, 035 Δ	0, 034 Δ



Si se quisiera hacer de hormigón de 300 kilogramos, la esbeltez sería, por interpolación, 15; $\Delta = 66{,}6$ ó 67 centímetros, bajo presión aparente de 70,4 kilogramos por centímetro cuadrado. El volumen sería $\frac{67^2}{62^2} = 1{,}15$ veces mayor y en la misma proporción aumentaría el peso de todas las armaduras; el aumento de costo sería mucho mayor que que el corresponde á forzar la riqueza en cemento, que sólo supone, á 80 pesetas tonelada,

$$8 \text{ ptas.} \times 0,384.4 \text{ m}^3 = 3{,}07 \text{ ptas.},$$

en cada metro lineal. Mientras que sólo el aumento de hormigón:

$$0{,}15 \times 0,384.4 = 0,057.7 \text{ m}^3,$$

al precio de 60 pesetas, da 3,46 pesetas por metro lineal; y el de armaduras:

$$0{,}02 \times 0,057.7 \times 7.800 = 9{,}00 \text{ kg}.$$

á 0,50, vale 4,50 pesetas por metro lineal. En total, la economía obtenida con hormigón de 400 kilogramos por metro cúbico, sobre el de 300, es:

$$3{,}46 + 4{,}50 - 3{,}07 = 4{,}89 \text{ ptas/m. l.}$$

Mientras la carga aparente, H_{pz}, dada por el cuadro (226) no exceda de 90, bastan las cuantías 0, 005 y 0, 015. El zunchado fuerte, con 0, 010 y 0, 030, permite apurar hasta el límite admisible en hormigón de 400 kilogramos por metro cúbico, 120 kilogramos por centímetro cuadrado.

Si el número $\frac{P}{l^2}$ es mayor que los máximos del cuadro, la limitación de Δ proviene sólo del aplastamiento y deduci-



ríamos $\Delta = \frac{P}{\text{máximo de } H_{pz}}$, y claro es que la esbeltez sería < 10.

Si $\frac{P}{l^2}$ es menor que los mínimos, la limitación proviene de la esbeltez, y determinaríamos $\Delta = \frac{l}{25}$; claro es que H_{pz} resultaría inferior á los menores valores del cuadro.

La carga P debe ser mayorada en 1,25, 1,43, 1,67, según la situación del pilar, bajo nervios simétricos, en fachada, ó en ángulo de ésta, conforme á lo ya dicho (cap. 3.°, II).

La sección más conveniente es, en general, la octógona, fácil de moldear y de transformar en cuadrada en los extremos, para el buen enlace con nervios. En la forma cuadrada, (fig. 89), el lado es $D = 0,886\,\Delta$ y el diámetro del zunchado

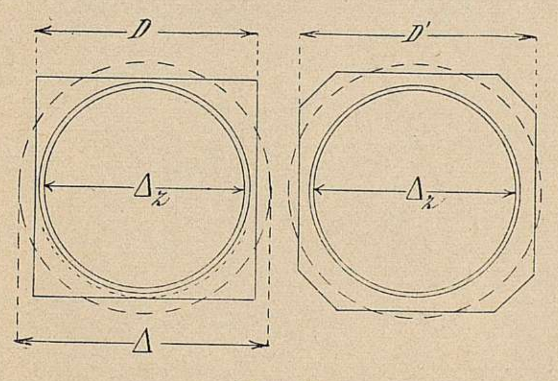


Figura 89.

$\Delta_z = 0,816\,\Delta$; queda un recubrimiento muy pequeño en las caras, $0,035\,\Delta$ al eje de la barra, y, en cambio, hay una zona extensa en los ángulos, lejos del zunchado y expuesta á saltar fácilmente. Conviene, por tanto, forzar ligeramente el lado hasta D' y compensarlo chaflanando los ángulos.

Si por necesidades de construcción conviene una sección rectangular, con relación de lados m, se puede calcular la



pieza elemental relativa á $\frac{P}{m}$ y formar la sección con m cuadrados, (fig. 90), modificándola después ligeramente,

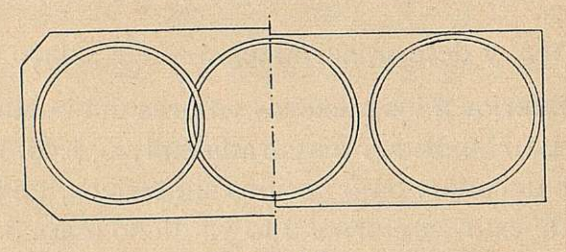


Figura 90.

aunque para ello se necesite hacer que dos hélices se compenetren un poco. Pero estas aplicaciones son algo forzadas, y la forma por excelencia es la circular, ó, mejor, octogonal.

TABLA (80)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	MOMENTOS RESISTENTES PRÁCTICOS	$q = \frac{\alpha}{ac}$	n	$\frac{H'}{\mu}$	μ_{45}	$\frac{A}{\mu}$	$\mu_{1.200}$	H'	q'_{45}
Asimétricas.	$M \begin{cases} = 11\, q\, ac^2 \\ = 11\, \alpha\, c \end{cases}$	0, 000 2	0, 075	0, 547	82,3	102,5	11,7	6,02	»
		0, 000 4	0, 104	0, 797	56,2	103,6	11,6	8,77	»
		0, 000 6	0, 125	0, 990	45,5	104,3	11,5	10,89	»
		0, 000 8	0, 143	1, 176	38,3	105,0	11,4	12,94	»
		0, 001 0	0, 159	1, 326	33,9	105,6	11,3	14,59	»
		0, 001 5	0, 191	1, 674	27,0	106,8	11,2	18,41	»
		0, 002 0	0, 217	1, 992	22,6	108,0	11,1	21,91	»
		0, 003 0	0, 259	2, 520	17,8	109,5	11,0	27,72	»
	$M \begin{cases} = 10\, q\, ac^2 \\ = 10\, \alpha\, c \end{cases}$	0, 004	0, 291	3, 045	14,7	110,7	10,8	30,45	»
		0, 005	0, 319	3, 510	12,8	111,9	10,7	35,10	»
		0, 006	0, 344	3, 294	11,5	112,8	10,6	39,24	»
		0, 006 75	**0, 360**	**4, 259**	**10,56**	**113,6**	**10,56**	**42,59**	»
		0, 007	0, 365	4, 365	10,3	113,9	10,5	43,65	»
Disimétricas.		0, 008	**0, 371**	**5, 000**	**10,0**			**45,00**	**0, 000 15**
			0, 384	4, 776	9,4	114,6	10,4	47,76	
	$M \begin{cases} = 9\, q\, ac^2 \\ = 9\, \alpha\, c \end{cases}$	0, 009	**0, 394**	**5, 000**	**9,0**			**45,00**	**0, 000 9**
			0, 402	5, 173	8,7	115,5	10,4	46,55	
		0, 010	**0, 394**	**5, 000**	**9,0**			**45,00**	**0, 003 0**
			0, 418	5, 556	8,1	116,4	10,3	50,00	
		0, 012	**0, 394**	**5, 000**	**9,0**			**45,00**	**0, 006 7**
			0, 446	6, 322	7,1	117,6	10,3	56,90	
	$M \begin{cases} = 8\, q\, ac^2 \\ = 8\, \alpha\, c \end{cases}$	0, 014	**0, 421**	**5, 625**	**8,0**			**45,00**	**0, 006 5**
			0, 472	7, 039	6,4	118,5	10,1	56,31	
		0, 016	**0, 421**	**5, 625**	**8,0**			**45,00**	**0, 009 9**
			0, 493	7, 766	5,8	119,4	10,0	62,13	
	$M \begin{cases} = 7\, q\, ac^2 \\ = 7\, \alpha\, c \end{cases}$	0, 018	**0, 450**	**6, 429**	**7,0**			**45,00**	**0, 008 8**
			0, 513	8, 464	5,3	120,6	9,9	59,25	
		0, 020	**0, 450**	**6, 429**	**7,0**			**45,00**	**0, 011 8**
			0, 531	9, 151	4,9	121,5	9,8	64,06	
	$M \begin{cases} = 6\, q\, ac^2 \\ = 6\, \alpha\, c \end{cases}$	0, 022 5	**0, 485**	**7, 500**	**6,0**			**45,00**	**0, 009 7**
			0, 551	10, 000	4,5	122,4	9,8	60,00	
		0, 025 0	**0, 485**	**7, 500**	**6,0**			**45,00**	**0, 013 0**
			0, 569	10, 840	4,1	123,6	9,7	65,04	

9+9'

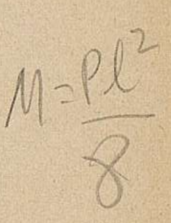


TABLA (86)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	MOMENTOS RESISTENTES PRÁCTICOS	$q = q'$	n	$\frac{H'}{\mu}$	μ_{45}	$\frac{A}{\mu}$	μ_{1200}	μ'	
Simétricas.	$M \begin{cases} = 11\, qac^2 \\ = 11\, \alpha c \end{cases}$	0, 006	0, 292	3,004	14,9	109,4	10,96	11,64	*Hormigón de 300 kg.*
		0, 007	0, 307	3,238	13,9	109,6	10,94		
		0, 008	0, 319	3,434	13,1	109,9	10,91		
	$M \begin{cases} = 10\, qac^2 \\ = 10\, \alpha c \end{cases}$	0, 009	0, 331	3,637	12,4	110,2	10,89	11,65	
		0, 010	0, 340	3,817	11,8	110,5	10,86		
		0, 012 4	**0, 360**	**4,159**	**10,8**	**110,9**	**10,80**	**11,66**	
		0, 014	0, 372	4,391	10,3	111,2	10,78	11,12	
	$M \begin{cases} = 9\, qac^2 \\ = 9\, \alpha c \end{cases}$	0, 016	0, 384	4,632	9,7	111,4	10,76	10,50	
		0, 018	0, 395	4,858	9,3	111,6	10,75	10,10	
	$M \begin{cases} = 8\, qac^2 \\ = 8\, \alpha c \end{cases}$	0, 020	0, 404	5,050	8,9	111,7	10,74	9,68	
		0, 022 5	0, 415	5,300	8,5	112,1	10,71	9,27	
		0, 025 0	0, 424	5,506	8,1	112,3	10,68	8,85	
		$q = q'$	n	$\frac{H'}{\mu}$	μ_{56}	$\frac{A}{\mu}$	$\mu_{1.200}$	μ'	
	$M \begin{cases} = 10\, qac^2 \\ = 10\, \alpha c \end{cases}$	0, 012	0, 358	4,125	13,56	110,9	10,80	11,66	*Hormigón de 400 kg.*
		0, 014	0, 372	4,385	12,81	111,2	10,78		
		0, 016	0, 384	4,644	12,06	111,4	10,76		
		0, 018	0, 395	4,858	11,58	111,6	10,75		
		0, 020	0, 404	5,050	11,09	111,7	10,74		
		0, 021 9	**0, 412**	**5,228**	**10,72**	**111,9**	**10,72**	**11,67**	
		0, 024	0, 419	5,392	10,39	112,0	10,70	11,33	
		0, 026	0, 426	5,547	10,08	112,1	10,67	11,07	
	$M \begin{cases} = 9\, qac^2 \\ = 9\, \alpha c \end{cases}$	0, 028	0, 432	5,678	9,86	112,1	10,64	10,79	
		0, 030	0, 437	5,811	9,64	112,3	10,61	10,56	

TABLA (100)

	μ_1	q	μ	q'	n'	n''	n	$(1-n)$	$\frac{3-n}{3}$	$\frac{2}{9-3n}$	$\frac{1}{10\sqrt{\mu q}}$
Asimétricas.	11	0, 000 2	11,7				0, 075	0, 925	0, 975	0, 228	»
		0, 000 4	11,6				0, 104	0, 896	0, 965	0, 230	»
		0, 000 6	11,5				0, 125	0, 875	0, 958	0, 232	»
		0, 000 8	11,4				0, 143	0, 857	0, 952	0, 233	»
		0, 001 0	11,3				0, 159	0, 841	0, 947	0, 235	9,52
		0, 001 5	11,2				0, 191	0, 809	0, 936	0, 237	7,81
		0, 002	11,1				0, 217	0, 783	0, 928	0, 239	6,76
		0, 003	11,0				0, 259	0, 741	0, 914	0, 243	5,49
	10	0, 004	10,8				0, 291	0, 709	0, 903	0, 246	5,00
		0, 005	10,7				0, 319	0, 681	0, 894	0, 249	4,48
		0, 006	10,6				0, 344	0, 656	0, 885	0, 251	4,08
		0, 007	10,5				0, 365	0, 635	0, 878	0, 253	3,84
		0, 008	10,4	0, 000 2	0, 297	0, 074	0, 371	0, 629	0, 876	0, 254	3,79
									$\frac{2-n}{2}$	$\frac{4}{18-9n}$	
Disimétricas.	9	0, 009		0, 000 9							2,84
		0, 010	9,0	0, 003 0	0, 315	0, 079	0, 394	0, 606	0, 803	0, 277	3,00
		0, 012		0, 006 7							3,28
	8	0, 014	8,0	0, 006 5	0, 337	0, 084	0, 421	0, 579	0, 789	0, 281	2,99
		0, 016		0, 009 9							2,79
	7	0, 018	7,0	0, 008 8	0, 360	0, 090	0, 450	0, 550	0, 775	0, 287	2,82
		0, 020		0, 011 8							2,67
	6	0, 022 5	6,0	0, 009 7	0, 388	0, 097	0, 485	0, 515	0, 758	0, 293	2,72
		0, 025		0, 013 0							2,58
Simétricas.	11	0, 006	10,96	0, 006	0, 234	0, 058	0, 292	0, 708	0, 854	0, 260	3,89
		0, 007	10,94	0, 007	0, 246	0, 061	0, 307	0, 693	0, 846	0, 262	3,61
		0, 008	10,91	0, 008	0, 255	0, 064	0, 319	0, 681	0, 840	0, 264	3,37
	10	0, 009	10,89	0, 009	0, 265	0, 066	0, 331	0, 669	0, 834	0, 266	3,33
		0, 010	10,86	0, 010	0, 272	0, 068	0, 340	0, 660	0, 830	0, 268	3,16
		0, 012	10,81	0, 012	0, 287	0, 071	0, 358	0, 642	0, 821	0, 270	2,89
		0, 012 4	**10,80**	**0, 012 4**	**0, 288**	**0, 072**	**0, 360**	**0, 640**	**0, 820**	**0, 272**	**2,84**
		0, 014	10,3	0, 014	0, 298	0, 074	0, 372	0, 628	0, 814	0, 273	2,67
	9	0, 016	9,7	0, 016	0, 307	0, 077	0, 384	0, 616	0, 808	0, 275	2,64
		0, 018	9,3	0, 018	0, 316	0, 079	0, 395	0, 605	0, 802	0, 277	2,48
	8	0, 020	8,9	0, 020	0, 323	0, 081	0, 404	0, 596	0, 798	0, 278	2,50
		0, 022 5	8,5	0, 022 5	0, 332	0, 083	0, 415	0, 585	0, 792	0, 280	2,36
		0, 025	8,1	0, 025	0, 339	0, 085	0, 424	0, 576	0, 786	0, 282	2,23

TABLA AUXILIAR PARA EL CÁLCULO DE ARMADURAS

Diámetro.	Peso de una barra....	Áreas correspondientes á un número de barras										
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16
mm.	kg/m.l.	cm²	cm²	cm²	cm²	cm²	cm²	cm²	cm²	cm²	cm²	cm²	cm²
2	0, 024	0, 063	0, 094	0, 128	0, 157	0, 188	0, 222	0, 251	0, 283	0, 314	0, 377	0, 440	0, 502
2,5	0, 038	0, 098	0, 147	0, 196	0, 245	0, 294	0, 344	0, 393	0, 442	0, 491	0, 589	0, 687	0, 786
3	0, 055	0, 141	0, 212	0, 283	0, 353	0, 424	0, 495	0, 565	0, 636	0, 707	0, 848	0, 990	1, 131
3,5	0, 075	0, 192	0, 283	0, 385	0, 481	0, 577	0, 673	0, 770	0, 866	0, 962	1, 154	1, 347	1, 539
4	0, 098	0, 251	0, 377	0, 503	0, 628	0, 754	0, 880	1, 005	1, 131	1, 256	1, 507	1, 758	2, 010
4,5	0, 124	0, 318	0, 477	0, 636	0, 795	0, 954	1, 113	1, 272	1, 431	1, 590	1, 908	2, 226	2, 544
5	0, 153	0, 393	0, 589	0, 785	0, 982	1, 178	1, 374	1, 571	1, 767	1, 963	2, 356	2, 748	3, 141
6	0, 220	0, 56	0, 85	1, 13	1, 41	1, 70	1, 98	2, 26	2, 54	2, 83	3, 39	3, 96	4, 52
7	0, 300	0, 77	1, 15	1, 54	1, 92	2, 31	2, 69	3, 08	3, 46	3, 85	4, 62	5, 39	6, 16
8	0, 392	1, 00	1, 51	2, 01	2, 51	3, 01	3, 52	4, 02	4, 52	5, 03	6, 03	7, 04	8, 04
9	0, 496	1, 27	1, 91	2, 54	3, 18	3, 82	4, 45	5, 01	5, 72	6, 36	7, 64	8, 90	10, 02
10	0, 612	1, 57	2, 36	3, 14	3, 93	4, 71	5, 50	6, 28	7, 07	7, 85	9, 42	11, 00	12, 56
12	0, 881	2, 26	3, 39	4, 52	5, 65	6, 79	7, 91	9, 05	10, 18	11, 31	13, 58	15, 82	19, 10
14	1, 199	3, 08	4, 62	6, 16	7, 70	9, 24	10, 77	12, 32	13, 86	15, 39	18, 48	21, 54	24, 64
16	1, 568	4, 02	6, 03	8, 04	10, 05	12, 06	14, 07	16, 08	18, 09	20, 11	24, 12	28, 14	32, 16
18	1, 983	5, 09	7, 63	10, 18	12, 72	15, 26	17, 81	20, 36	22, 90	25, 45	30, 52	35, 62	40, 72
20	2, 488	6, 28	9, 42	12, 57	15, 71	18, 84	21, 99	25, 14	28, 28	31, 42	37, 68	43, 98	50, 28
22	2, 962	7, 60	11, 40	15, 21	19, 01	22, 81	26, 61	30, 41	34, 21	38, 01	45, 62	53, 22	60, 82
24	3, 525	9, 05	13, 57	18, 10	22, 62	27, 14	31, 67	36, 19	40, 71	45, 24	54, 28	63, 34	72, 38
26	4, 136	10, 62	15, 93	21, 24	26, 55	31, 86	37, 17	42, 47	47, 78	53, 09	63, 72	74, 34	84, 94
28	4, 797	12, 31	18, 47	24, 63	30, 79	36, 94	43, 10	49, 26	55, 42	61, 58	73, 88	86, 20	98, 52
30	5, 507	14, 14	21, 21	28, 27	35, 34	42, 41	49, 48	56, 55	63, 62	70, 68	84, 82	98, 96	113, 10
32	6, 266	16, 08	24, 13	32, 17	40, 21	48, 26	56, 30	64, 34	72, 38	80, 42	96, 52	112, 60	128, 68
34	7, 074	18, 16	27, 24	36, 32	45, 40	54, 48	63, 56	72, 63	81, 71	90, 79	108, 96	127, 12	145, 26
36	7, 930	20, 36	30, 54	40, 72	50, 90	61, 07	71, 26	81, 43	91, 61	101, 79	122, 14	142, 52	162, 86
40	9, 791	25, 13	37, 70	50, 26	62, 83	75, 40	87, 96	100, 53	113, 09	125, 66	150, 80	175, 92	201, 06
45	12, 391	31, 84	47, 71	63, 62	79, 52	95, 42	111, 33	127, 23	143, 13	159, 04	190, 84	254, 46	286, 26
50	15, 296	39, 27	58, 90	78, 54	98, 17	117, 81	137, 44	157, 08	176, 71	196, 35	235, 62	274, 88	253, 42





GRÁFICO (99)

4 c 4 — 2 μ_1 2 — 6 q 6 — 1 M 1 — 3 $q.ac^2$ 3 — 5 $q.ac$ 5 — 7 ac 7 — 8 a 8

$10^{-3} \times 2$ — 5×10^{-3}


FUNDACIÓN
JUANELO
TURRIANO



Dat

62,40 E (09)

FCIE

(¿Se llegó a editar la 2ª Parte de "Observaciones"?)



